Teoría y ejercicios de Matemáticas

Departamento de Matemáticas
Curso 1.º E.S.O
Colegio Romareda. Zaragoza.

ÍNDICE DE TEORÍA Y PRÁCTICA

- **REPASO DE 6º PRIMARIA** (Página 3):
- **TEMA 1** (Página 7)**:** Números enteros. Cálculo entre ellos.
- **TEMA 2** (Página 15)**:** Expresiones algebraicas. Ecuaciones.
- **TEMA 3** (Página 31)**:** Proporcionalidad
- **TEMA 4** (Página 44)**:** Teorema de Thales.
- **TEMA 5** (Página 58)**:** Teorema de altura, cateto y Pitágoras.
- **TEMA 6** (Página 69)**:** Áreas de las figuras planas.
- **TEMA 7** (Página 79)**:** Funciones.
- **TEMA 8** (Página 81)**:** Estadística.

REPASO DE 6º

Para que puedas seguir todos los conceptos relativos a las Matemáticas de 1° de E.S.O., debes recordar todas estas cosas que aprendiste el año pasado.

DIVISIBILIDAD

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando ese número por los números naturales.

Un número es divisor de otro cuando la división del primero por el segundo es exacta.

Un número es primo si solamente tiene dos divisores el 1 y el mismo. Un número es compuesto si tiene mas de dos divisores. El numero uno no es primo ni compuesto.

Un número es divisible por 2 si la cifra de sus unidades es cero o un numero par.

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Un número es divisible por 5 si la cifra de sus unidades es cero o cinco.

Un número es divisible por 11 si lo es la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y las que ocupan lugar impar en el numero dado.

Para escribir un número como producto de sus factores primos se descompone en factores, dividiendo el número y los sucesivos cocientes por números primos, hasta llegar a la unidad. A la derecha de la raya vertical quedan todos los factores primos.

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes. Es igual al producto de los factores primos comunes, elevados al menor exponente.

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de sus múltiplos comunes. Es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

FRACCIONES

Una fracción es una expresión que nos indica que tenemos una unidad dividida en partes iguales y tomamos una o varias de dichas partes.

Para reconocer si dos fracciones son equivalentes, basta con calcular los productos cruzados y comprobar si estos son iguales.

Cuando multiplicamos o dividimos por el mismo número el numerador y denominador de una fracción, obtenemos otra equivalente.

Simplificar una fracción consiste en obtener una equivalente a la dada que sea irreducible.

Para sumar fracciones hay que tener en cuenta:

a) Si las fracciones tienen el mismo denominador: se suman los numeradores y por denominador se dejan el mismo que tenían.

b) Si las fracciones tienen distinto denominador: se reducen a común denominador (se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores, ese numero será el nuevo denominador, para hallar el numerador se divide el mínimo común múltiplo por cada uno de los denominadores anteriores y el cociente obtenido se multiplica por su numerador correspondiente), una vez seguido este proceso se aplica el caso anterior.

Para restar fracciones se procede como en los casos de la suma, teniendo en cuenta que los numeradores deben restarse.

Producto de fracciones: es otra fracción que tendrá como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

Cociente de dos fracciones: Es otra resultado de multiplicar la primera por la inversa de la segunda.

Dos fracciones son inversas si su producto es la unidad.

La expresión decimal de una fracción es el resultado de dividir el numerador entre el denominador.

Si el resto de la división es cero, la fracción representa a un numero natural; si no lo fuera, si sacando decimales llegamos a un resto cero, obtenemos un numero decimal limitado, que se puede expresar mediante una fracción decimal.

Si, al extraer decimales, no llegamos a un resto cero, pero se repiten una o algunas cifras decimales, obtenemos un numero decimal periódico.

El numero o números que se repiten se llama periodo, siendo un numero decimal periódico puro si el periodo comienza inmediatamente después de la coma, o periódico mixto si no comienza el periodo inmediatamente después de dicha coma.

POTENCIAS

Una potencia es una forma abreviada de escribir el producto de un numero por sí mismo varias veces.

a^n se lee *a* elevado a *n* y significa a.a ... a (n veces)

El numero “a” es la base y “n” es el exponente.

Potencia de un producto es igual a elevar cada uno de los factores al exponente dado

$$(3 \,.\, 5 \,.\, 7)^6 = 3^6 \,.\, 5^6 \,.\, 7^6$$

Potencia de un cociente es igual a elevar el dividendo y el divisor al exponente dado.

Para multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

Para dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes.

Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

Todo número elevado a cero es igual a la unidad, todo numero elevado a uno es igual a la base.

Recuerda que la radicación es la inversa de la potencia. Debes repasar como se calcula la raíz cuadrada.

- **Propiedad distributiva del producto respecto de la suma y la resta.**

Para aplicar la propiedad distributiva se multiplica el factor por cada uno de los sumandos, sumando después los productos obtenidos.

$$5\,(3 + 6 + 9) = 5 \,.\, 3 + 5 \,.\, 6 + 5 \,.\, 9 = 15 + 30 + 45 = 90$$

En cuanto a su aplicación a la diferencia se procede de la misma forma, restando después los productos.

$$8\,(16 - 5) = 8 \,.\, 16 - 8 \,.\, 5 = 128 - 40 = 88$$

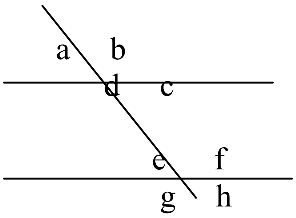
- **Operaciones combinadas.**

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES.

Las operaciones se efectúan en el siguiente orden:

1.- Si hay paréntesis, primero se efectúan las operaciones que hay en su interior.
2.- Luego se efectúan las potencias y raíces.
3.- Después las multiplicaciones y divisiones.
4.- Por ultimo sumas y restas.
5.- En caso de tener el mismo nivel, se comienza por la izquierda.

ÁNGULOS



Complementarios: *a* y *e*; *d* y *g*; *b* y *f*; *c* y *h*; son iguales
Alternos internos: *d* y *f*; *c* y *e;* son iguales
Alternos externos: *a* y *h*; *b* y g*;* son iguales
Conjugados internos: *d* y *e*; *c y f*; son suplementarios
Conjugados externos: *a* y *g*; *b* y *h*; son suplementarios
Opuestos por el vértice: *a* y *c*; *b* y *d*; *e* y *h*; *f* y *g*; iguales
Adyacentes: *a* y *d*; *d* y *c*; *c* y *b*; *b* y *a*; *e* y *g*; *g* y *h*; *h* y *f*; *f* y *e*; suplementarios.

TEMA 1: NÚMEROS ENTEROS

Un numero entero se representa mediante un numero natural, precedido de un signo, + o -.
El numero entero cero, no se suele escribir precedido de signo.
Un numero entero con signo +, se llama **entero positivo**.
Un numero entero con signo -, se llama **entero negativo**.

- ✓ Se llama **valor absoluto** de un numero entero, al número que resulta al prescindir del signo. El valor absoluto del numero entero 0 es cero.
- ✓ Para **sumar dos enteros positivos** se suman sus valores absolutos y se pone signo (+)
- ✓ Para **sumar dos números enteros de distinto signo** se restan sus valores absolutos y se pone el signo del de mayor valor absoluto.
- ✓ Para **sumar dos enteros negativos** se suman sus valores absolutos y se pone signo (-).
- ✓ La suma de un numero entero cualquiera y el 0 es el mismo número. Decimos que 0 es el **elemento neutro** de la suma.
- ✓ Dado un numero entero cualquiera podemos encontrar otro entero tal que sumados den 0. Dos números **opuestos** tienen el mismo valor absoluto y signo contrario.

El opuesto de +5 es –5 *El opuesto de –5 es +5*

- ✓ Para **restar** dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.

$(+7) - (+5) = (+7) + (-5) = +2$ $(-4) - (-1) = (-4) + (+1) = -3$

PARA ORDENAR NÚMEROS ENTEROS:

- De dos números enteros positivos, es mayor el de mayor valor absoluto.
- De dos números enteros de distinto signo, es mayor el positivo.
- De dos números enteros negativos, es mayor el de menor valor absoluto.

Para **multiplicar dos números enteros positivos** se multiplican sus valores absolutos y se pone signo (+).

Para **multiplicar un entero positivo por otro negativo** se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo (-).

Para **multiplicar un entero negativo por otro positivo** se multiplican sus valores absolutos y se pone signo (-).

Para **multiplicar dos enteros negativos, se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo (+).**

RESUMEN:

Para multiplicar dos números enteros, se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo que indica la siguiente regla de los signos:

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot - = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$

Para hallar el **cociente de dos números enteros,** se dividen sus valores absolutos y con el signo se procede siguiendo la regla indicada en la multiplicación.

Potencia de un numero entero:

Para elevar un numero entero a un exponente dado se procede como ya conocemos,; pero debemos tener en cuenta: cuando **la base es positiva,** el resultado será siempre positivo, **si la base es negativa** y el **exponente es par**, el resultado será positivo, pero si la **base es negativa** y el **exponente impar**, el resultado será negativo.

Cuadrado de una suma:

Cuadrado del primero, mas doble producto del primero por el segundo, mas cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\ a\ b + b^2$$

Cuadrado de una diferencia:

Cuadrado del primero, menos doble producto del primero por el segundo, mas cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\ a\ b + b^2$$

Suma por diferencia:

diferencia de cuadrados.

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

CALCULO CON NÚMEROS ENTEROS

- **Calculo de un polinomio aritmético:**

Se puede calcular de dos formas:

1.-Se hacen las operaciones sucesivamente en el orden en que aparecen.

2.- Se suman los números que llevan signo +
Se suman los números que llevan signo –
Se restan los resultados.

- **Cálculo con paréntesis:**

Se puede calcular de dos formas:

1.- Realizando las operaciones de dentro del paréntesis y luego quitar el paréntesis.

2.-Quitar primero los paréntesis y luego realizar las operaciones indicadas.

Antes de quitar los paréntesis debemos tener en cuente qué signo le precede:

Cuando se suprime un paréntesis precedido del signo (+) se dejan los signos del interior del paréntesis como están.

Cuando se suprime un paréntesis precedido del signo menos (-) se cambian todos los signos del interior del paréntesis.

TEMA 1: OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

1.- Ordena de mayor a menor los siguientes enteros:

a) (-8) , (+4) , 0 , (-13) , (+17)

b) (+15) , 0 , (-13) , (+2) , (-4) , (-1)

c) (-7) , (+2) , 0 , (-15) , (+4) , (-3)

d) (+8) , (-4) , (+3) , 0 , (-17) , (+5)

2.- Ordena de menor a mayor los siguientes enteros:

a) (-15) , (+2) , 0 , (-8) , (-4) , (+7)

b) (+6) , (-3) , 0 , (-4) , (-8) , (+2)

c) (-9) , (+6) , (-12) , 0 , (-4) , (+7)

d) (-3) , (+6) , (-4) , (-8) , 0 , (+15) , (+3)

3.- Realiza las siguientes operaciones:

• (+4) + (+8)
• (+6) + (-15)
• (-8) + (+17)
• (-9) + (-32)
• (-6) - (-8)
• (-7) - (+9)
• (+9) - (-7)
• (+15) - (+6)
• (-8) . (-4)
• (-6) . (+4)
• (+6) . (-9)
• (+5) . (+12)

• (-16) : (-4)
• (-24) : (+12)
• (+6) : (+2)
• (+9) : (-3)
• (+7) + (+8)
• (+8) + (-15)
• (-6) + (-15)
• (-4) + (+16)
• (-8) - (-12)
• (-9) - (+13)
• (+6) - (-15)
• (+4) - (+11)

• (+6) . (+8)
• (+6) . (-3)
• (-14) . (-5)
• (-12) . (+7)
• (-16) : (-2)
• (-18) : (+3)
• (+24) : (+6)
• (+39) : (-13)
• (+15) + (+12)
• (+16) + (-18)
• (-24) + (-13)
• (-19) + (+17)

• (-8) - (-17)
• (-6) - (+15)
• (+9) - (-17)
• (+12) - (+8)
• (+6) . (-4)
• (-12) . (-3)
• (+7) . (+8)
• (-3) . (+9)
• (+16) : (+4)
• (-8) : (-2)
• (+15) : (-3)
• (-24) : (+6)

4.- Desarrolla y calcula:

• $(5 + 4)^2$
• $(6 + 5)^2$
• $(4 + 9)^2$
• $(10 - 6)^2$
• $(1 + 7)^2$

• $(7 + 3)^2$
• $(4 + 3)^2$
• $(9 - 4)^2$
• $(7 - 1)^2$
• $(2 + 5)^2$

• $(8 - 5)^2$
• $(8 + 2)^2$
• $(6 - 2)^2$
• $(9 + 6)^2$
• $(9 - 6)^2$

• $(11 - 3)^2$
• $(9 - 3)^2$
• $(11 + 3)^2$
• $(13 - 2)^2$
• $(7 - 2)^2$

• $(4 + 7)^2$
• $(5 - 4)^2$
• $(2 + 8)^2$
• $(15 + 4)^2$
• $(10 + 5)^2$

• $(15 - 12)^2$
• $(10 - 2)^2$
• (5 + 7)2
• $(13 - 7)^2$
• $(10 - 4)^2$

5.- Desarrolla:

- $(a + b)^2$ • $(a - b)^2$ • $(2a + b)^2$ • $(2a - b)^2$
- $(3a + 2b)^2$ • $(3a - 2b)^2$ • $(5a + 3b)^2$ • $(4a - 2b)^2$
- $(a^2 + b)^2$ • $(5a^2 - 2b^2)^2$ • $(3a^2 - 2b^3)^2$ • $(2a^2 - 5y^3)^2$ 3

6.- Completa el término que falta en las siguientes igualdades:

- (-4) + (   ) = (-28) • (-4) + (   ) = (+12) • (   ) + (+4) = (-15)
- (   ) + (+9) = (+7) • (   ) - (-15) = (-2) • (   ) - (+13) = (+27)
- (-18) - (   ) = (+3) • (+15) - (   ) = (-8) • (   ) . (-9) = (-27)
- (   ) . (+6) = (-54) • (-8) . (   ) = (+64) • (+3) . (   ) = (+27)
- $\dfrac{\quad}{(+12)} = (-4)$ • $\dfrac{(-12)}{\quad} = (+3)$ • $\dfrac{(-35)}{(+5)} =$
- (   ) : (-8) = (+5) • (-36) : (   ) = (+3)

7.- Calcula el valor de los siguientes polinomios aritméticos:

a) -2 + 7 - 3 + 6 - 5 + 9 - 18 =
b) +4 - 9 - 6 + 8 - 12 + 17 - 13 =
c) -3 + 6 - 5 + 8 - 9 + 4 - 3 + 6 =
d) -7 + 5 - 4 + 6 - 9 - 3 + 8 - 7 =
e) -5 + 6 - 9 - 4 + 3 + 8 - 7 + 2 =
f) +3 - 9 - 6 + 8 - 5 + 4 - 3 + 6 =
g) -7 - 6 + 5 - 9 - 2 + 4 - 3 - 8 =
h) -4 + 3 - 5 - 6 - 9 + 2 - 1 + 8 =

8.- Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) -2 [-(-3 + 4 - 5) -2 (-3 + 4)] - [- (4 + 5) - 2 - (-3 + 6) - 3 (-2 + 6)] - 1 =
b) -3 - [- (-3 + 2 - 1) + 2 (-3 + 4)] - [- 3 (-2 + 5)] - [-3 (+2 - 4) - 3 (2 + 3)] + 3 =
c) -2 - [- (-3 + 5) - (-3 + 4)] - [-3 + 2 + (-3 + 4)] - [- (+3 - 2) - (2 - 5)] =
d) -3 + [-2 + (-3 + 4) - 3 (+2 - 1)] - [-3 + 4 (-2 + 1) -3 (+2 - 5)] - (-3 + 2) =
e) -4 -[-3 + 2 (-2 + 5) - 3 - (-4 + 2)] - [-3 (+2 - 1) - (-4 + 5)] - (-3 + 4) =
f) +2 - 3[- (-3 + 4) - 3(-2 + 5)] - 6 +[- (-3 + 4) - (-2 + 5)] - (-3) =
g) +4 - 5 [- (-3 + 6) - 2 (-3 + 4)] - 3 (-2 + 1) - [- (+4 - 3) - (-3 + 6)] - (+3) =
h) +5 (-3 + 2) - [- (-4 + 6) - 3 (-2 + 4) - 3] - (-4 + 2) + [- (-3 + 5) - 2 (-1 + 3)] =
i) 3 [-3 (+2 + 1) - 3(-2 + 4)] - (-2 + 5) - [- (-4 + 3) - (-2 + 5)] - (-3 + 2) =
j) 4 - [-3(2 + 4) - (-3) + 2] - [-2 (-3 + 4) + 3(-2 + 4)] + (-4 + 6) =
k) 5 -[- (-4 + 6) - (-3 + 2) - 3(-2 + 4)] - (-3 + 4) - [- (-3 + 6) - 2] =

9.- Efectúa los siguientes productos aplicando la propiedad distributiva:

a) (-4 + 3) . (-3 + 5) = b) (-7 + 2) . (+5 - 3) = c) (+4 - 5) . (-8 + 4) =

d) (+6 + 7) . (-8 - 4) = e) (-3 - 6) . (+4 + 8) = f) (+2 - 7) . (-7 + 2) =

g) (-2 + 3 - 4) . (+5 - 3) = h) (-5 + 4) . (-3 + 4 - 2) = i) (-4 - 3 + 2) . (-3 + 4 - 2) =

j) (-2 + 3 - 4) . (-3 + 2 - 1) = k)(-3 + 5) . (-4 + 3 + 5) = l) (-2 + 3 - 5) . (-4 + 6 + 2) =

10.- Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{(-2)^3 \cdot (+3)^2 \cdot (-5)^3 \cdot 6^0}{(2 \cdot 5)^3} =$$

11.- Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{(-4)^3 \cdot (-5)^2 \cdot (+10)^2 \cdot (-3)^4}{(2 \cdot 3)^2 \cdot (-10)^3 \cdot (-1)^5} =$$

12.- Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{(-8)^3 \cdot (+3)^4 \cdot (-5)^3}{(9 \cdot 10)^2} =$$

13.- Calcula el valor de x en las siguientes igualdades:

- (-x) + (-18) = (+18)
- (+13) - (-x) = (+7)
- (+7) . (-x) = (+63)
- (+14) - (+x) = (-36)
- (+x) - (-36) = (+48)
- (+17) + (+x) = (-54)
- (-36) - (-x) = (-108)
- (+2) - (+x) = (+75)

14.- Halla:

$$\left[\frac{[(14-3+4)-(+3)]\cdot(-5)}{(3)\cdot[(7-2+9)-(+10)]}\right] \times \left[(11-13):(11-10)\right] =$$

15.- Halla:

$$\left[\frac{(-5)\cdot[(-12)+(-3)+14-(-9)]}{[-3-(-11)-4-(-1)]\cdot(-2)}\right] \div [(12-10)\cdot(7-8)] =$$

16.- Halla:

$$\left[\frac{[(-4-5+8)-(-10)]\cdot(-4)}{(-2)\cdot[(10+4-3)-(+8)]}\right]\div\left[(12-16)\div(7-9)\right]=$$

17.- Halla:

$$\left[\frac{\left[((+8)-7+15)-(+6)\right]\cdot(-4)}{(5)\cdot[(12-4+5)-(+11)]}\right]\div\left[(-5+4)\cdot(13-15)\right]=$$

18.- Halla:

$$\left[\frac{(4)\cdot[(10-12+3)-(+11)]}{(-5)\cdot[(-7+13-8)-(-1)]}\right]\times[(-13+11)\cdot(15-16)]=$$

EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN

1. Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(5+2x)^2 =$

b) $(x-3y)^2 =$

c) $(4a^2+3b)^2 =$

d) $(2a^3-b)^2 =$

2. Calcula, utilizando las propiedades de las potencias, el valor de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{(2\cdot5^2)^3\cdot20\cdot(3)^9\cdot5}{(27)^2\cdot5^5\cdot450} =$

b) $\dfrac{15^3\cdot7^0\cdot216}{(10)^2\cdot5^4\cdot81} =$

c) $\dfrac{11^3 \cdot 900}{11^0 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 1331} =$

d) $\dfrac{(-2 \cdot 3)^4 \cdot (-7)^2 \cdot 25}{(-5)^3 \cdot (-7)^2 \cdot 6^2} =$

e) $\dfrac{(-4)^2 \cdot (-5)^2 \cdot (10)^2 \cdot (-3)^4 \cdot 490}{(-81) \cdot (-25) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 42 \cdot 14} =$

3. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $6 - \{4 \cdot [3 \cdot (2-1) - (-4) + (-5)] - [3 \cdot (2-1) - (-3+4)]\} =$

b) -3 + [-2 + (-3 + 4) - 3 (+2 - 1)] - [-3 + 4 (-2 + 1) -3 (+2 - 5)] - (-3 + 2) =

c) 4 – {5 [- (-3 + 6) - 2 (-3 + 4)] - 3 (-2 + 1) - [- (+4 - 3) - (-3 + 6)]} - (+1) =

d) -3 - [- (-3 + 2 - 1) + 2 (-3 + 4)] - [- 3 (-2 + 5)] - [-3 (+2 - 4) - 3 (2 + 3)] + 5 =

e) $\dfrac{2 \cdot (4 \cdot 5 + 6 \cdot 5)}{2 \cdot (6+4)} \times [(21 - 3) : (14 - 5)] =$

f) $\dfrac{[(14-3+4)-(+3)] \cdot (-5)}{3 \cdot [(7-2+9)-(+10)]} \times [(18 - 4) : (9 - 2)] =$

g) $\left[\dfrac{(-5) \cdot [(-12) + (-3) + 14 - (-9)]}{[-3 - (-11) - 4 - (-1)] \cdot (-2)}\right] \div [(12 - 10) \cdot (7 - 8)] =$

h) $\left[\dfrac{[(-4 - 5 + 8) - (-10)] \cdot (-4)}{(-2) \cdot [(10 + 4 - 3) - (+8)]}\right] \div [(12 - 16) \div (7 - 9)] =$

TEMA 2 : EXPRESIONES ALGEBRAICAS - ECUACIONES

Expresión algebraica es una expresión matemática en la que aparecen números y letras ligados con operaciones.

Ejemplo: $2x^2 - 3y + 2x + 16 - 7x + 2$ es una expresión algebraica.

Los **términos** de una expresión algebraica es cada uno de los sumandos que constituyen la expresión. La expresión del ejemplo tiene seis términos.

Indeterminadas o **variables** son las letras que aparecen en la expresión algebraica.
Coeficientes son los valores numéricos que multiplican a las indeterminadas en la expresión algebraica.

En esta expresión aparece el signo (=). $3 .2 + 4 = 5 .6 - 20$ Es una igualdad. Toda **igualdad** consta de **dos miembros**. Llamamos **primer miembro** a la parte que precede al signo igual y **segundo miembro**, a la que le sigue. El signo igual separa los dos miembros.

Llamamos **ecuación** a la igualdad de dos expresiones algebraicas

Ejemplo: $3x + 4x = 5x - 18$

Las dos partes de una ecuación, a uno y otro lado del signo **igual**, se llaman **miembros**. Las letras que aparecen en la ecuación se llaman **incógnitas.** Los términos que no llevan incógnita se llam an **independientes.**

PASOS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN.

a) Ecuaciones de la forma $6x - 4 = 3x + 2$

Se pasan todos los términos en **x** a uno de los miembros de la ecuación (trasposición de términos); debemos tener en cuenta que al cambiar de termino cambia de operación.

$$\mathbf{6x - 3x = 2 + 4}$$

Se reducen los términos semejantes

$$\mathbf{3x = 6}$$

Se despeja **x**

$$\mathbf{x = 6 / 3} \qquad \mathbf{x = 2}$$

b) Ecuaciones con paréntesis $2(7 - x) + 6x = 8 - 5(x - 1) + 7x + 4$

Se suprimen los paréntesis aplicando la propiedad distributiva

$$14 - 2x + 6x = 8 - 5x + 5 + 7x + 4$$

Se trasponen los términos (los términos en **x** al primer miembro y los términos independientes al segundo.

$$-2x + 6x + 5x - 7x = 8 + 5 + 4 - 14$$

Se reducen los términos semejantes

$$2x = 3$$

Se despeja la **x**

$$x = 3 / 2$$

c) Ecuaciones con denominadores $3x / 4 + 1 = (x - 2)/ 6 - 7$

Se suprimen los denominadores hallando el m.c.m. de los denominadores

(m.c.m. = 12)

$$3 \cdot 3x + 12 \cdot 1 = 2(x - 2) - 12 \cdot 7$$

$$9x + 12 = 2(x - 2) - 84$$

Se suprimen los paréntesis aplicando la propiedad distributiva

$$9x + 12 = 2x - 4 - 84$$

Se trasponen términos

$$9x - 2x = -4 - 84 - 12$$

Se reducen términos semejantes

$$7x = -100$$

Se despeja la **x**

$$x = -100 / 7$$

En general, los pasos a seguir en la resolución de una ecuación con coeficientes enteros, son los siguientes:

1° Se reducen los dos términos a común denominador (Si hay fracciones)
2° Se suprimen los paréntesis

3° Se trasponen los términos
4° Se reducen términos semejantes
5° Se despeja **x**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

Cuando un problema se resuelve utilizando solo números se dice que se emplea el **método aritmético.**

Cuando un problema se resuelve utilizando ecuaciones se dice que se emplea el **método algebraico.**

Para resolver un problema por el **método algebraico** se siguen los siguientes pasos:

1.- Planteamiento.
Plantear un problema es poner en forma de ecuación la información o condiciones contenidas en el enunciado.
Para plantear un problema se designa con una letra (por ejemplo **x**) el numero que se busca, o sea, la incógnita.
Después se somete la incógnita a las operaciones que indica el enunciado. Así resulta una ecuación.

2.- Resolución.
La ecuación que resulte se resuelve por la forma que ya conocemos.

3.- Comprobación.
Después de resuelta la ecuación hay que comprobar si la solución responde a las condiciones del enunciado.

Ejemplo: *Un padre tiene 26 años mas que su hijo. Cuando pasen 2 años la edad del padre será triple que la del hijo. ¿Que edades tienen hoy el padre y el hijo?*

Planteamiento

Edad del hijo ahora	**x**
Edad del padre ahora	**x + 26**
Edad del hijo dentro de dos años	**x + 2**
Edad del padre dentro de dos años	**x + 26 + 2**

Como la edad del padre será triple que la del hijo, se obtiene la siguiente ecuación

$$\mathbf{X + 26 + 2 = 3\ (x + 2)}$$

Resolución

$$\mathbf{X + 26 + 2 = 3\,x + 6}$$

X – 3 x = 6 – 26 – 2

-2 x = - 22

x = 22 / 2 **x = 11 Solución**

Edad del hijo ahora 11 años

Comprobación

Edad del hijo ahora: 11 años
Edad del padre ahora: 11 + 26 = 37 años
Edad del hijo dentro de dos años: 11 + 2 = 13 años
Edad del padre dentro de dos años: 37 + 2 = 39

Se comprueba que la edad del padre será triple que la del hijo:

39 = 3 . 13

TEMA 2 : EXPRESIONES ALGEBRAICAS – ECUACIONES

ECUACIONES DE 1er GRADO

1. $2x + 5 = 17$
2. $3x - 4 = 26$
3. $3x + 4x = 5x - 18$
4. $5x - x = 3x + 24$
5. $2x + 3x = 7x + 8x - 48$
6. $2(x - 3) = x - 1$
7. $3(x - 4) = 2x - 3$
8. $17 - (2x + 5) = 4 - x$
9. $13 - (4x + 6) = x - 3$
10. $-2 (-3 + x) = x - 15$
11. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 6$
12. $\frac{x}{5} - \frac{x}{6} = 3$
13. $\frac{x}{4} + \frac{3x}{8} = 30$
14. $\frac{x}{12} - \frac{5x}{16} = \frac{-55}{3}$
15. $\frac{x+3}{4} + \frac{2x+5}{6} - \frac{3x-2}{8} = \frac{x+1}{3}$
16. $\frac{4x-1}{5} - \frac{2x-3}{10} + \frac{3x-1}{6} = \frac{16x+9}{15}$
17. $\frac{4x+3}{2} - \frac{5x-4}{6} - \frac{4x-9}{3} = 1$
18. $\frac{2x+3}{6} - \frac{3x-2}{4} = x - \frac{5x}{12}$
19. $\frac{5x+3}{10} - \frac{3x-2}{12} - \frac{10x+29}{30} = 4 - 2x$
20. $\frac{4x+3}{8} - \frac{3x-4}{12} - \frac{6x+1}{40} = 1$
21. $\frac{3x-2}{12} - 7x = \frac{25x}{12} - 9x$

22. $\frac{4x+3}{8}-\frac{3x-2}{10}=x-\frac{29x+7}{40}$

23. $\frac{x+6}{8}-\frac{x-1}{12}-\frac{2x+3}{24}=\frac{1}{2}$

24. $\frac{x+12}{8}-\frac{x-12}{15}-\frac{x-25}{30}=\frac{13}{3}$

25. $\frac{16}{9}-\frac{x-15}{8}-\frac{x-9}{72}=1$

26. $\frac{4}{3}+\frac{2x+6}{9}-\frac{x-3}{4}-\frac{2x+3}{36}=10-x$

27. $\frac{3(2x+5)}{4}-\frac{3x-1}{8}+\frac{1}{4}=9+\frac{x-2}{4}$

28. $\frac{4(2x-5)}{3}-\frac{2x+7}{6}+\frac{x-1}{2}=\frac{x-4}{3}+x+2$

29. $\frac{3(2x+5)}{5}-\frac{5(2x-1)}{10}+\frac{x+4}{3}=5x+\frac{10+x}{30}$

30. $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{6}+\frac{2(x+5)}{9}=x-3$

31. $\frac{x-2}{6}-\frac{x+2}{9}+\frac{2(x-3)}{3}=x-5+\frac{x-6}{9}$

32. $\frac{3x+8}{7}-\frac{2(x-5)}{3}+\frac{x+15}{2}=5+x+\frac{10-x}{3}$

33. $\frac{2x-4}{9}-\frac{4x-16}{12}+\frac{x+1}{3}=x-2+\frac{5-x}{9}$

34. $\frac{2(x+5)}{3}-\frac{3(x+1)}{8}+\frac{x+9}{4}=\frac{x+2}{4}+5$

35. $\frac{2(x+3)}{5}+\frac{3(x-2)}{8}+\frac{4(x-1)}{9}=7+\frac{5x-1}{90}$

36. $\frac{4x+3}{6}-\frac{2x-5}{8}+\frac{x-3}{2}=\frac{x}{10}+2$

37. $\frac{3x-4}{6}-\frac{4x-3}{9}+\frac{1}{2}=x-4+\frac{x-2}{18}$

38. $\frac{2x+3}{6}-\frac{2(x-4)}{3}+\frac{x}{4}=2+\frac{x-4}{12}$

39. $3x-\frac{12-2x}{5}+\frac{1}{4}=3x-1+\frac{3x+2}{20}$

40. $x+\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}-\frac{x+3}{4}=x-2+\frac{x+1}{12}$

41. $2x-\frac{x+4}{3}-\frac{x+5}{4}-\frac{x+6}{5}=x-3+\frac{2x+3}{20}$

42. $x+\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}+\frac{x}{5}=x+1+\frac{3x+2}{30}$

43. $\frac{2x+5}{4}+\frac{2x-5}{2}+\frac{x+1}{3}-x-1=\frac{4x+1}{12}$

44. $\frac{x+3}{3}+\frac{x+4}{4}+\frac{x+5}{5}-\frac{3x+4}{6}=x+\frac{x+7}{10}$

45. $1+\frac{x-1}{2}-\frac{2}{5}-\frac{x-8}{3}=\frac{3x+1}{10}$

46. $\frac{2x-1}{3}-\frac{1+2x}{6}+\frac{5x}{4}=x+4+\frac{9-x}{6}$

47. $\frac{4x-3}{4}-\frac{3x-4}{3}+x=2+\frac{3x+1}{12}$

48. $\frac{2x+3}{5}+\frac{2x-3}{2}-\frac{x-3}{4}=x+2+\frac{x-3}{4}$

49. $\frac{2(x+5)}{3}+\frac{3(x-5)}{4}-\frac{x+10}{5}-1=\frac{3x+5}{4}$

50. $\frac{3(x+5)}{4}-\frac{4(x-5)}{3}+\frac{x}{2}=8+\frac{26-x}{3}$

51. $5-\frac{3x-4}{6}+\frac{x}{2}=x-\frac{2}{3}$

52. $\frac{4x-1}{6}-\frac{1+4x}{3}+\frac{x+4}{2}=\frac{8-x}{3}$

53. $\frac{7x-3}{4}-\frac{2(x+5)}{6}+\frac{1}{2}=x-1+\frac{x-2}{3}$

54. $\frac{x-2}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x-1}{5}-\frac{3x}{40}=\frac{9-x}{2}$

55. $\frac{x+1}{3}-\frac{3x}{5}=\frac{x}{4}-\frac{5x+6}{60}-\frac{5}{8}$

56. $\frac{4(x-1)}{3}-\frac{3(x-2)}{4}+\frac{8}{3}=\frac{x}{4}$

57. $\frac{7x-3}{4}-\frac{3x-1}{6}+\frac{1}{2}=x+\frac{x-1}{3}$

58. $\frac{2x+1}{3}+\frac{3x-1}{2}-\frac{17}{3}=x-4-\frac{2x}{3}$

59. $\frac{4x+2}{6}-\frac{3x+2}{8}+\frac{x}{4}=x-4+\frac{x}{8}$

60. $\frac{2x-3}{4}-\frac{3x-2}{6}+\frac{1}{4}=\frac{x-11}{6}$

61. $\frac{4x}{5}+\frac{5x}{4}-\frac{5+4x}{2}=\frac{-15}{2}+\frac{x}{4}$

62. $\frac{9x-1}{2}-\frac{3x+4}{8}+\frac{1}{2}=3x+\frac{x+4}{8}$

63. $\frac{4x-3}{6}-\frac{2x+81}{4}+17=x-5-\frac{x+3}{12}$

64. $\frac{3x-2}{4}-\frac{2x+3}{6}+\frac{1}{2}=\frac{x+3}{6}$

65. $\frac{4x-3}{3}-\frac{3x-3}{4}+x=x+2+\frac{1}{2}$

66. $\frac{4x-1}{6}+\frac{1+x}{8}-\frac{2x-3}{6}=46+\frac{107-x}{24}$

67. $\frac{x-8}{3}+\frac{x-7}{3}-\frac{x-6}{5}=\frac{11-x}{5}$

68. $\frac{x+3}{3}-\frac{x-1}{5}-\frac{x+2}{6}=\frac{x+8}{30}$

69. $\frac{2x+4}{3}+\frac{4-x}{5}-\frac{x-1}{2}=2+\frac{x+2}{15}$

70. $\frac{4x+8}{3}-\frac{1}{6}+\frac{x-3}{2}=2x+\frac{5-x}{3}$

71. $\frac{4x+3}{6}-\frac{3x-4}{8}+\frac{4}{5}=x+\frac{10x+3}{60}$

72. $\frac{5x-4}{3}+\frac{2x-1}{8}-\frac{x+1}{4}=x+3+\frac{x-3}{8}$

73. $\frac{2x-5}{8}-\frac{4x-3}{9}+\frac{1}{10}=\frac{13x}{40}$

74. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}=x+4$

75. $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{3(x+2)}{4}-\frac{x+5}{6}=x+1+\frac{1}{4}$

76. $\frac{4x-3}{2}-\frac{2(x+1)}{5}-\frac{1}{6}=x+3+\frac{x+4}{15}$

77. $\frac{3x-2}{4}-\frac{1}{6}+7x=92+\frac{13-x}{3}$

78. $\frac{3x-2}{4}+5(2x-3)=\frac{3}{4}+10x-5$

79. $5-2(x+3)+\frac{19}{6}=x+2+\frac{x+1}{6}$

80. $\frac{3x}{4}-\frac{x}{2}+\frac{x-2}{6}=\frac{x+2}{8}+\frac{x-3}{3}$

81. $\frac{4x}{3}-\frac{x+1}{8}+\frac{2x+5}{3}-4=x+1+\frac{2x+1}{12}$

82. $\frac{2x+3}{4}+\frac{3x+4}{2}-\frac{19-x}{6}=2x+2+\frac{16-x}{12}$

83. $\frac{9-x}{4}+\frac{5+x}{2}-\frac{3x-4}{8}=x-1+\frac{x}{8}$

84. $\frac{2x+15}{5}+\frac{15-2x}{10}+\frac{1}{6}=x+2+\frac{x+1}{15}$

85. $\frac{3x+4}{3}-\frac{3x-1}{6}+\frac{1}{8}=6+\frac{10-x}{8}$

86. $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{4}+\frac{x-2}{5}-\frac{x-6}{6}=x-5+\frac{15-x}{4}$

87. $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{4}=\frac{x}{5}+\frac{1}{4}-3$

88. $\frac{x+3}{3}-\frac{x+4}{4}-\frac{x+5}{5}-\frac{x+6}{6}+x=\frac{x}{2}+\frac{11-x}{6}$

89. $\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{4}(x-4)=0$

90. $\frac{4+x}{2}-\frac{4-x}{4}=x+\frac{3-x}{2}$

91. $\frac{1}{5}(x+10)+\frac{2}{5}(x-10)+\frac{3}{5}(x+10)=x+24$

92. $\frac{7}{5}(x-5)-\frac{4}{5}(x+5)=19$

PROBLEMAS DE PLANTEO

1.- He comprado cantidades distintas de bocadillos de tortilla y jamón. En total 17 bocadillos por 11,95 euros. Los de tortilla a 0,6 euros y los de jamón a 0,95 euros. ¿Cuántos bocadillos compré de cada clase?

2.- La suma de dos números es 142. Dividiendo el mayor por el menor se obtiene 6 de cociente y 16 de resto. Calcula ambos números.

3.- La diferencia de dos números es 135. Dividiendo el mayor por el menor se obtiene 11 de cociente y 5 de resto. Calcula ambos números.

4.- He comprado cantidades distintas de botes de cola y cerveza. En total 15 botes por 4,2 euros. Los de cola a 0,3 euros y los de cerveza a 0,25 euros. ¿Cuántos compré de cada clase?

5.- La tercera, la cuarta, la quinta y la sexta parte de mi dinero suman euros menos que lo que tengo. ¿Cuánto llevo?

6.- Dos ríos tienen tales longitudes que suman 1.500 km. La décima parte del mayor aventaja a la quinceava parte del menor en 50 km. Calcula sus longitudes.

7.- En un garaje hay motos y coches. En total 75 vehículos y 230 ruedas. ¿Cuántos vehículos hay de cada clase?

8.- En una granja hay pollos y conejos. En total 1.000 animales y 3.500 patas. ¿Cuántos hay de cada clase?

9.- He pagado una factura de 9,5 euros. con 70 monedas de 25 y de 5 céntimos. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

10.- En la actualidad la edad de un padre es el triple de la de su hijo. Dentro de 15 años sólo será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

11.- La suma de 4 múltiplos consecutivos de 7 es 126. Calcula dichos múltiplos.

12.- Dos personas salen de compras con la misma cantidad de dinero. La primera se compra una calculadora de 30 € y la segunda unos zapatos de 20 €, con lo cual ésta tiene ahora doble dinero que la primera. ¿Cuánto dinero sacó cada una?

13.- Cuando nació un niño su padre tenía 25 años. Hoy día la edad del padre es 6 veces mayor que la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

14.- Las edades de dos hermanos son tales que la del mayor es triple que la del menor. Dentro de cuatro años la edad del mayor será doble que la del menor. ¿Qué edad tiene cada uno?

15.- Dos números consecutivos son tales que la novena parte del menor y la undécima parte del mayor también forman números consecutivos. Calcúlalos.

16.- Dos números son tales que se diferencian en dos unidades. La sexta parte del mayor y la octava parte del menor también se diferencian en dos unidades. Calcúlalos.

17.- Dos números impares consecutivos son tales que la quinta parte del menor supera en dos unidades a la novena parte del mayor. Calcúlalos.

18.- Divide el número 500 en dos partes tales que dividiendo la mayor por 9 y la menor por 5 obtengamos como suma de cocientes exactos 76.

19.- La edad de un padre y la de su hijo suman 50 años. Dentro de 5 años la edad del padre será el triple de la del hijo. Calcula sus edades actuales.

20.- Las edades de dos hermanos suman 23 años. Cuando pase un año la edad del mayor será cuádruple de la del menor. ¿Qué edades tienen?

21.- En la actualidad las edades de dos hermanos suman 24 años. Hace 3 años la edad del mayor era doble que la del menor. ¿Qué edades tienen?

22.- A cierto número le hemos restado 1/5 y el resultado lo hemos multiplicado por 75 obteniendo 1860. ¿Con qué número hemos operado?

23.- El doble de un número es igual a 38. ¿De qué número se trata?

24.- Al sumar seis unidades al triple de un número, se obtiene 33, ¿Qué número es?

25.- La suma de dos números consecutivos es 121 ¿Qué números son?

26.- Calcula un número cuya tercera parte, sumada con el doble de ese número, es 1gual a 14.

27.- Si a un número se le suma su tercera parte, se obtiene 148. ¿Cuál es ese número?

28.- El doble de un número más su mitad es 60. Calcula ese número.

29.- La suma de dos números consecutivos es 51, ¿Cuáles son esos números?

30.- Dos números suman 100, y el mayor supera al menor en 10 unidades. Calcula los dos números.

31.- Calcula un número cuya tercera parte, sumada con el triple de ese número dé como resultado 40.

32.- Halla dos números impares consecutivos cuya suma sea 80.

33.- Si sumamos 5 unidades al doble de un número el resultado es el mismo que si le sumamos 7 unidades. ¿Cuál es el número?

34.- La suma de tres números naturales consecutivos es 84. Halla dichos números.

35.- La suma de dos números es 24, y el doble del primero menos el segundo es 6, ¿Cuáles son estos números?

EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN

1) - Dos números consecutivos suman 115. Calcúlalos.

2) - Dos números pares consecutivos suman 214. Calcúlalos.

3) - Dos números impares consecutivos suman 316. Calcúlalos.

4) - La suma de dos números es 304. El duplo del mayor y el triple del menor se diferencian en 168. Calcúlalos.

5) - La suma de dos números es 123. La tercera parte del mayor y la sexta del menor se diferencia en 14 unidades. Calcúlalos.

6) - La diferencia de dos números es 54. La sexta parte del mayor y la tercera parte del menor forman números consecutivos. Calcúlalos.

7) - La suma de dos números es 216. Dividiendo el mayor por 15 y el menor por 3 los cocientes obtenidos son iguales. Calcúlalos.

8) - La diferencia de dos números es 72. La duodécima parte del mayor y la cuarta parte del menor forman números pares consecutivos. Calcúlalos.

9) - La media aritmética de dos números es 45. Ambos números se diferencian en 18 unidades. Calcúlalos.

10) - Las edades de dos hermanos suman 24 años. Hace 6 años la edad del mayor era triple que la del menor. Calcula sus edades actuales.

11) - En la actualidad la edad de un muchacho es el doble que la de su hermano menor y hace 4 años era el triple. Calcula sus edades actuales.

12) - Las edades de dos hermanos se diferencian en 5 años. Hace 15 años la edad del mayor era doble que la del menor. Calcula sus edades actuales.

13) - Las edades de un padre y su hijo suman 46 años. Dentro de 5 años la edad del padre será triple de la del hijo. Calcula sus edades actuales.

14) - La edad de un padre y la de su hijo suman 91 años. Hace 23 años la edad del padre era el cuádruplo de la del hijo. Calcula sus edades actuales.

15)- La edad de un padre y la de su hijo se diferencian en 35 años. Dentro de 5 años la edad del hijo será la sexta parte de la edad de su padre. Calcula sus edades actuales.

16)- Las edades de tres hermanos son números pares consecutivos. La tercera parte de la edad del menor, la mitad de la del mediano y la cuarta parte del mayor suman 15 años. Calcula sus edades.

17)- Las edades de tres hermanos son números impares consecutivos. Dentro de 5 años sus edades sumarán 66 años. Calcula sus edades actuales.

18)- Las edades de dos hermanos están en la relación de 2 es a 3. Su suma es 20 años. Calcúlalas.

19)- Las edades de dos hermanos están en la relación de 3 es a 5. Su diferencia es 10 años. Calcúlalas.

20)- Las edades de dos hermanos se diferencian en 8 años. Cuando pasen 9 años sus edades estarán en la relación de 3 es a 4. Calcúlalas.

21)- En una división entera el divisor y el resto se diferencian en 2 unidades. El cociente es 10 y el dividendo 416. Escribe la división.

22)- En una división entera de divisor 24 y resto 13 el dividendo y el cociente suman 438. Escribe la división.

23)- En una división entera de divisor 18 y resto 15 el dividendo y el cociente se diferencian en 559 unidades. Escribe la división.

24)- En una división entera el cociente y el resto son iguales. El dividendo es 494 y el divisor 25. Escribe la división.

25)- En una división entera el dividendo y el resto suman 1240. El cociente es 25 y el divisor 48. Escribe la división.

26)- En una división entera el dividendo y el resto se diferencian en 540. El cociente es 36 y el divisor 15. Escribe la división.

27)- En una división entera de dividendo 962 y cociente 38 el divisor y el resto suman 37. Escribe la división.

28)- En una división entera el dividendo y el divisor se diferencian en 5442 unidades. El cociente es 54 y el resto 36. Escribe la división.

29)- Por un bocadillo y un refresco he pagado 200 céntimos. Por tres bocadillos y 2 refrescos pago 525 céntimos. Halla el precio de cada artículo.

30)- Por un bolígrafo y una goma de borrar he pagado 37 céntimos. Por dos bolígrafos y cinco gomas pago 110 céntimos. Halla el precio de cada objeto.

31)- La suma de dos números es 124. Dividiendo el mayor por el menor se obtiene 5 de cociente y 16 de resto. Calcula ambos números.

32)- La diferencia de dos números es 216. Dividiendo el mayor por el menor obtengo 9 de cociente y 16 de resto. Calcúlalos.

33)- El perímetro de un rectángulo es 488 cm. Calcula su área sabiendo que sus dimensiones están en la relación de 1 es a 3.

34)- El perímetro de un rectángulo es 216 cm. Calcula sus dimensiones sabiendo que están en la relación de 5/7.

35)- Dos automóviles separados por 216 km. tardan en cruzarse 1 hora y 12 minutos. Calcula sus velocidades sabiendo que están en la relación de 4 es a 5.

36)- Dos motoristas separados por 54 km. tardan en cruzarse 20 minutos. Calcula sus velocidades sabiendo que están en la relación de 4 es a 5.

37)- Un ciclista ha recorrido 108 km. A favor del viento lleva una velocidad de 40 km./h. En contra del viento de 30 km./h. En total ha invertido 2 h. 56 minutos. ¿Cuántos km. hizo a favor del viento y cuántos en contra?

38)- Hemos hecho un viaje de 450 km. parte por carretera y parte por autopista. Por carretera hemos sacado una media de 75 km./h. Y por autopista de 108 km./h. ¿Qué distancia hemos recorrido por cada tramo si hemos empleado 4 h. y 32 minutos?

39)- Dos capitales se diferencian en 54.000 céntimos. El mayor al 8 % durante 5 meses y el menor al 6 % durante 10 meses, producen intereses iguales. Calcúlalos.

40)- Dos capitales se diferencian en 40.000 céntimos. El mayor al 9 % durante 8 meses y el menor al 7,5 % durante 15 meses producen unos intereses que suman 14.700 céntimos. Calcula los capitales.

41)- Un capital de 108.000 céntimos. se ha dividido en dos partes desiguales. La mayor al 9 % en 8 meses ha producido los mismos intereses que la menor al 5 % durante 18 meses. Calcula ambos capitales.

42)- ¿Qué número debo sumar a los dos términos de la fracción 3/8 para que se transforme en 3/4?

43)- ¿Qué número debo restar a los dos términos de la fracción 39/41 para que se transforme en 3/4?

44)- Una persona cambia monedas de 10 céntimos. por monedas de 25 céntimos., sin perder ni ganar en el cambio. Una vez efectuado éste tiene 150 monedas menos. ¿Cuánto dinero cambió?

45)- Una persona cambia monedas de 10 céntimos. por monedas de 100 céntimos., sin perder ni ganar en el cambio. Una vez efectuado éste tiene 270 monedas menos. ¿Cuánto dinero cambió?

46)- Tengo un total de 64 monedas. Unas son de 5 céntimos. y otras de 100 céntimos. En total tengo 2.505 céntimos. ¿Cuántas hay de cada clase?

47)- La tercera, la cuarta, la quinta y la sexta parte de mi dinero suman 60 céntimos. menos de lo que tengo. ¿Cuánto dinero llevo?

48)- Un padre reparte de forma desigual 300 céntimos. entre sus dos hijos. El mayor con su dinero se compra un bote de cola de 40 céntimos. y el pequeño con el suyo un “cómic” de 80 céntimos., con lo cual el mayor tiene ahora doble dinero que el pequeño. ¿Cómo repartió las 300 céntimos. el padre?

49)- Para pagar un reloj de 5.400 céntimos. una persona entregó 72 monedas. Unas de 100 céntimos. y otras de 25 céntimos. ¿Cuántas había de cada clase?

50)- Al duplo de un número le restamos 480 unidades y el resultado lo hemos dividido por 5 y hemos obtenido un cociente que excede en 4 unidades a la quinta parte de dicho número. Calcúlalo.

51)- En un triángulo isósceles el ángulo desigual equivale a los 4/5 de la suma de los otros dos. Calcula los ángulos del triángulo.

52)- En una tienda de reproducción cobran 75 céntimos. por cliché y a 1,25 céntimos. por copia. En otra tienda cobran las 100 primeras copias a 2,50 céntimos. y el resto a 1,15 céntimos. y no cobran nada por el cliché. Yo que tengo que hacer unas copias me da igual una oferta que la otra. ¿Cuántas copias tengo que hacer?

53)- Hace 6 años la edad de un padre era triple que la de su hijo. Cuando pasen 12 años será el doble. Calcula sus edades actuales.

54)- Un jornalero se contrata por la comida y 2.400 céntimos. por cada día trabajado, y pagará 625 céntimos. por la comida los días que no trabaje. En el mes de agosto ha cobrado 53.225 céntimos. ¿Cuántos días ha trabajado?

55)- Una persona sale de casa a las 5 de la tarde a dar un paseo haciendo una media de 6 km./h. Finalizado éste descansa durante 15 minutos y regresa a casa en el coche de un amigo a 96 km./h. llegando a casa a las siete menos veinte de la tarde. ¿Qué distancia ha recorrido paseando?

56)- Multiplicando la tercera parte de mi dinero por 7 y restando 20 céntimos. al resultado obtenido, encuentro el duplo de mi dinero. ¿Cuánto tengo?

57)- Dos ciclistas salen a 30 km./h. desde un pueblo A hacia otro B distante 72 km. En cierto punto el primero sufre una avería que le lleva repararla 18 minutos. Una vez reparada arranca y a 36 km./h. llega al pueblo de destino al mismo tiempo que su compañero. ¿En qué km. ocurrió la avería?

58)- En un campeonato de liga un equipo ha jugado 34 partidos de los cuales ha perdido 9. Ha terminado con 41 puntos. ¿Cuántos partidos ganó y cuántos empató?

59)- Los dos términos de una fracción son números consecutivos y además es propia. Aumentando al numerador en 3 unidades y al denominador en 12 unidades la nueva fracción llega a valer 1/2 . Calcúlala.

60) - Un tractorista se contrata por 540.000 céntimos. y un televisor en color al año. A los cinco meses se despide y le corresponde 162.000 céntimos. y el televisor. ¿Cuál es el precio del televisor?

61)- Si al triple de un número le restas dicho número, resulta 30. ¿Cuál es ese número?

62)- La suma de un número natural y el siguiente es 13. Averigua mentalmente cuáles son estos números. Después plantea una ecuación y resuelve con ella el problema planteado.

63)- La suma de un número con su mitad es igual a 45. ¿Cuál es ese número?

64)- Ana pregunta a Sergio la edad que tiene y Sergio contesta: la mitad de mis años, más la tercera parte, más la cuarta parte, más la sexta parte de mis años suman los años que tengo más 6. ¿Cuántos años tiene Sergio?

65)- En un bolsillo tengo una cantidad de dinero y en el otro tengo el doble. En total tengo 600 €. ¿Cuántos € tengo en cada bolsillo?

66)- El perímetro de una finca rectangular es 480 m. ¿Cuánto miden el largo y el ancho si el largo mide cinco veces el ancho?

67)- El doble de un número menos siete es igual a

68)- ¿Cuál es ese número? 8.- Un número más el doble del anterior es igual a 19. ¿Cuáles son los números?

69)- Calcula la cantidad de colesterol en mg recomendada por persona y día sabiendo que la suma de su quinta parte y su sexta parte es 40 mg menor que su mitad.

70)- La medida de los tres lados de un triángulo son tres números consecutivos. Si el perímetro del triángulo es 12 cm, ¿cuánto mide cada lado?

71)- Luís le dice a Eva: Yo tengo el doble de euros que tú. Si Eva le contesta: Entre los dos tenemos 12 euros, ¿Cuántos euros tiene cada uno?

72)- La suma de tres números consecutivos es 30. ¿Cuáles son esos números?

TEMA 3: PROPORCIONALIDAD

Se llama **razón de dos números** al cociente indicado de dichos números (No hay que confundir razón con fracción)

Ejemplos: 3 / 5; 0,2 / 5; 4 / 2,5; 0,6 / 2

En una fracción sus términos nunca pueden ser decimales.

Los términos de una razón se llaman **antecedente** y **consecuente**
Para representar de forma general una razón la escribimos: **a / b** siendo **a el antecedente** y **b el consecuente.**

Como una razón es una división, el dividendo es el antecedente y el divisor el consecuente. El resultado de la división del antecedente entre el consecuente es la **constante de proporcionalidad.**

La **razón inversa** se obtiene intercambiando antecedente y consecuente.

Para **comparar razones**, se compara el resultado de dividir el antecedente entre el consecuente.

La igualdad de dos razones se llama **proporción**. Si a / b y c / d son dos razones, las escribimos en forma de proporción:

$$a / b = c / d$$

Los números **a** y **d** se llaman **extremos** y **b** y **c** **medios** y son los términos de una proporción.

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES:

En una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

En una proporción o en una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones.

En toda proporción un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.

En toda proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.

Proporción discreta es aquella que sus cuatro términos son distintos.

Proporción continua es aquella proporción cuyos medios o extremos son iguales.

- **<u>Cálculo de los términos de una proporción</u>:**

a) **Cuarta proporcional:** Llamamos cuarta proporcional al cuarto término de una proporción discreta cuyos tres primeros son los tres números colocados en el orden en que se dieron.

b) **Media proporcional o geométrica:** entre dos números es cada uno de los medios de la proporción continua, cuyos extremos son los dos números dados.

c) **Tercera proporcional:** Es el cuarto término de una proporción continua.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Magnitudes directamente proporcionales: Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una cantidad de una de ellas por un numero el valor correspondiente de la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Aplicaciones:

- ✓ **Regla de tres directa**. Desde antiguo se da el nombre de regla de tres al método empleado para resolver problemas en los que, dados tres datos numéricos, debe hallarse un cuarto numero, de modo que los cuatro números formen una proporción. Se trata de dos pares de valores que corresponden a dos magnitudes directamente proporcionales.

- ✓ **Tanto por ciento o porcentaje**. (Tanto por ciento o porcentaje es una razón cuyo consecuente en 100). Los problemas de tanto por ciento o porcentaje son una aplicación de la regla de tres simple directa donde uno de los termino de la proporción que se debe formar es 100.

- ✓ **Repartos proporcionales.** Repartir una cantidad, **N,** en partes directamente proporcionales a otras , ***a, b, c,*** es obtener otras cantidades, ***x, y, z,*** que sumadas nos den **N**.

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Magnitudes inversamente proporcionales. Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando a doble de una cantidad la corresponde la mitad de la otra; a triple la tercera parte, etc.

Aplicaciones

- ✓ **Repartos inversamente proporcionales.** Repartir una cantidad en partes inversamente proporcionales a tres números dados equivale a repartirla en partes directamente proporcionales a los inversos de dichos números.

- ✓ **Regla de tres simple inversa.** Se aplicara a proporciones simples inversas. Para resolverla se forma la proporción entre las cantidades, teniendo en cuenta que la razón de las cantidades es inversa.
- ✓ La cantidad desconocida aparecerá, también, como una cuarta proporcional y se calcula como tal.

- ✓ **Proporcionalidad compuesta:** Existe proporcionalidad compuesta cuando se establece la proporcionalidad entre varias magnitudes (mas de dos), siendo una magnitud directa o inversamente proporcional a cada una de las otras supuestas constantes.

- ✓ **Regla de tres compuesta.** Se aplica a proporcionalidades compuestas, en las que entran varias cantidades de varias magnitudes, conociéndose todas ellas menos una.

- ✓ **Repartos proporcionales directos e inversos al mismo tiempo.** Se multiplica cada cantidad directa por su correspondiente inversa procediéndose luego a resolver el problema por el método ya conocido.

TEMA 3 : PROPORCIONALIDAD

1.- ¿A qué llamamos razón de dos números?

2.- ¿Cómo se llaman los términos de una razón?

3.- Escribe 5 razones equivalentes a 2/3.

4.- Escribe 5 razones equivalentes a 3/4.

5.- ¿Qué es una proporción? ¿Cómo se llaman los términos de una proporción?

6.- ¿Cuál es la propiedad fundamental de las proporciones?

7.- Completa la siguiente relación:

$$\frac{2}{3} = \frac{\quad}{18} = \frac{\quad}{27} = \frac{54}{\quad} = \frac{108}{\quad} = \frac{\quad}{54}$$

8.- Completa la siguiente tabla:

7,5	0,75	108		216		324	
30	3	432	72		288		162

9.- a) Halla la cuarta proporcional entre 3, 5 y 9.
b) Halla la cuarta proporcional entre: 3/5 , 2/3 y 10/9.
c) Halla la cuarta proporcional entre 1/2 , 3/4 y 2 .
d) Halla la tercera proporcional entre 3 y 12 .
e) Halla la tercera proporcional entre 2/5 y 4/5
f) Halla la tercera proporcional entre 0,3 y 0,6
g) Halla la media proporcional o geométrica entre 16 y 25 .
h) Halla la media geométrica entre 0,25 y 0,49 .
i) Halla la media geométrica entre 48/96 y 3/24 .
j) Halla la media geométrica entre 7,29 y 10,24 .

10.- ¿Qué entiendes por proporcionalidad?

11.- a) ¿Qué son magnitudes directamente proporcionales? Cita tres ejemplos.

b) ¿Qué son magnitudes inversamente proporcionales? Cita tres ejemplos.

12.- Diecisiete cuadernos han costado 51 €. Halla el precio de 48 cuadernos.

13.- Doce lámparas han consumido en 17 días 918 kw. ¿Cuántos consumirán 15 lámparas en 12 días?

14.- Una guarnición de 100 hombres tienen víveres para 45 días. Se marchan 10 hombres, ¿para cuántos días durarán los víveres?

15.- Un helicóptero hace un recorrido de 600 km. en 1,5 horas. ¿En cuánto tiempo recorrerá 900 km.?

16.- En una tienda de electrodomésticos hacen el 18% de descuento en los artículos. Un televisor de color está marcado con 720 €. ¿Cuánto nos cobrarán?

17.- En clase somos 40 alumnos y en un examen de matemáticas hemos aprobado 26. ¿Qué % de alumnos han suspendido?

18.- He comprado una calculadora que costaba 27 €. El comerciante me la rebaja a 18 €. ¿Qué % de descuento me hizo?

19.- He comprado un reloj de 45 €. Me lo rebajan a 40,5 €. ¿Qué % de descuento me hicieron?

20.- Una persona cobraba 1200 € al mes. A partir de hoy cobra 1440 €. ¿Qué % de subida ha tenido en su sueldo?

21.- Un plano está realizado a escala 1:50.000 ¿Cuánto mide en la realidad un ramal de ferrocarril que en el plano viene representado por un segmento de 18 cm.?

22.- En el plano del ejercicio anterior (1:50.000) ¿Cuánto medirá una carretera de 36 km.?

23.- La distancia que separa en línea recta dos poblaciones en un mapa de escala 1: 125.000 es de 12,5 cm. ¿Cuál es la distancia real en km. entre ambas poblaciones?

24.- La distancia en línea recta entre dos puntos es de 270 km. ¿Qué distancia les separa en un mapa de escala 1: 450.000?

25.- Dos montes separados por 5 km. en línea recta aparecen en un plano separados por 10 cm. ¿A qué escala está construido el mapa?

26.- Repartir directamente proporcional la cantidad de 80 € entre 3 hermanos con proporción a sus edades que son 3, 5 y 8 años.

27.- Tres pintores se comprometen a pintar un chalet por 1400 €. El primero trabajó 12 horas; el segundo 8 y el tercero 15. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

28.- Una persona debe cobrar doble que otra y ésta la quinta de una tercera. Si el total a repartir es 240 €. ¿Cuánto debe percibir cada una?

29.- Repartir la cantidad de 46 €. en partes proporcionales a 2/3, 3/4 y 1/2.

30.- Repartir la cantidad de 3.160 € en partes directamente proporcionales a 3/4, 1/6 y 2/5.

31.- Repartir la cantidad de 3.630 € en partes directamente proporcionales a 3/5, 2/3 y 3/4.

32.- Repartir inversamente proporcional la cantidad de 1.110 céntimos. a 4, 5 y 6.

33.- Un padre destina 188 € para premiar las faltas de ortografía cometidas por sus hijos. El primero cometió 3, el segundo 4 y el tercero 5. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

34.- En un concurso hípico se destinan 7470 €. a repartir entre los 3 primeros clasificados proporcionalmente a su habilidad. El primero fue sancionado con 4 puntos, el segundo con 5 y el tercero con 7. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

35.- Con 400 kg. de manzanas un fabricante elabora 100 botellas de sidra de 3/4 l. cada botella. ¿Cuántas botellas de 1 litro se pueden llenar con 50.000 kg. de manzanas?

36.- Con 800 l. de leche hemos fabricado 640 paquetes de mantequilla de 100 gramos cada uno. ¿Cuántos litros de leche debemos emplear para fabricar 480 paquetes de 250 gramos cada uno?

37.- Con 1.377 kg. de alfalfa puedo alimentar 18 vacas durante 17 días dando a cada una 4,5 kg. diarios. ¿Cuántos días me durarán 3.240 kg. si tengo 24 vacas y a cada una le doy 5,4 kg.?

38.- Con 20 kg. de harina fabrico 25 panes de 1 kg. cada uno. ¿Cuántos panes de 400 gramos cada uno puedo fabricar con 64 kg. de harina?

39.- Quince obreros en 18 días de 8 horas diarias de trabajo han construido un canal de 400 m. de largo, 4 de ancho y 3,6 m. de profundidad. ¿De qué anchura lo construirán 24 obreros en 12 días de 9 horas diarias de trabajo si su longitud es 300 m. y su profundidad 6 m.?

40.- Por el alumbrado de 12 lámparas durante 54 días 8 horas diarias hemos abonado 1.296 céntimos. ¿Cuántas lámparas puedo encender durante 36 días a razón de 9 horas diarias con 2.025 céntimos.?

41.- Con 75 kg. de carne hemos preparado 900 hamburguesas de 85 gramos cada una. ¿De qué peso las puedo fabricar si necesito sacar 1.800 hamburguesas de 120 kg. de carne?

42.- Quince obreros en 24 días de 8 horas diarias de trabajo han asfaltado 12 km. de carretera. ¿Cuántas horas deben trabajar 24 obreros durante 36 días para asfaltar 36 km.?

43.- Con 36 obreros hemos descargado 48 Tm. de cemento desde un depósito de 24 m. de altura en 8 h. de trabajo. ¿Cuántas horas necesitan trabajar 24 obreros para descargar 36 Tm. de cemento desde un depósito de 16 m. de altura ?

44.- Por 14 días de estancia en un hotel una familia de 6 personas pagó 1008 €. ¿De cuántas personas se compone otra familia que por 8 días de estancia pagó 672 €. ?

45.- Una familia de tres personas pagó por 5 días de estancia en un hotel 360 €. ¿De cuántas personas es otra familia que por 8 días de estancia en dicho hotel pagó 768 €?

46.- Con una bomba de 54 caballos de vapor vacío un pozo de 108 m. de profundidad a razón de 48 l. por segundo. ¿De qué potencia es otra bomba que saca 54 l. por segundo de un pozo de 72 m. de profundidad?

47.- Con una grúa de 72 caballos de vapor descargo 400 sacos de 90 kg. cada uno desde una altura de 36 m. en 3 horas. ¿Qué potencia debo contratar para descargar 300 sacos de 75 kg. cada uno desde una altura de 48 m. empleando 2 horas?

48.- Con 6 botes de pintura de 800 g. cada uno puedo pintar 24 puertas dando dos manos de pintura a cada puerta. ¿De qué peso debo comprar 10 botes para pintar 45 puertas iguales a las anteriores si les tengo que dar 3 manos de pintura?

49.- Con 25 pintores en 18 días de 8 h. de trabajo se pintan las 150 viviendas de una urbanización. ¿Cuántos días de 10 horas diarias de trabajo emplearán 36 pintores en pintar las 720 viviendas de otra urbanización?

50.- Por el consumo de 12 lámparas durante tres meses a razón de 5 h. diarias he pagado 6.750 céntimos. ¿Cuántas lámparas iguales a las anteriores puedo encender durante 27 días a razón de 3 horas diarias con 9.720 céntimos?

52.- Con una esfera de mantequilla de 6 cm. De radio se sacan 75 raciones de 12 gramos cada una. ¿Cuántas raciones de 9 gramos de mantequilla se sacan de otra esfera de radio 15 cm.?

53.- Tengo pienso para 36 caballos durante 15 días dando a cada caballo 5,4 kg. diarios. ¿Para cuántos días me durará si vendo 12 caballos y doy a los restantes 4,5 kg. diarios?

54.- Dos estufas de 500 watios elevan 6ºC. la temperatura de una habitación en 1 hora. ¿De qué potencia debo poner 5 estufas para elevar en 2 horas 18ºC. la temperatura de esa misma habitación?

55.- Con 20 kg. de harina fabrico 24 panes de 1 kg. cada uno. ¿Cuántos panes de 480 gramos puedo fabricar con 36 kg. de harina?

EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN

PROPORCIONALIDAD

1.- Indica si hay proporcionalidad directa, inversa o si no hay ninguna proporcionalidad:

a) Cantidad de personas que viajan en un autobús y dinero recaudado.
b) Cantidad de refrescos que caben en una caja y diámetro de las botellas.
c) Número de litros que escapan por segundo en el desagüe de una piscina y diámetro del desagúe.
d) Velocidad media de un ciclista y distancia recorrida.
e) Número de vueltas que da una rueda para recorrer una distancia y diámetro de la rueda.
f) Número de comensales para zamparse una tarta y cantidad que corresponde a cada uno.
g) Tiempo que tarda un balón en caer al suelo y altura desde la que se lanza.
h) Número de horas que está encendida una bombilla y gasto que ocasiona.
i) Número de peldaños de una escalera móvil de altura fija y separación entre ellos.
j) Número de peldaños de una escalera de altura fija y anchura de ellos.
k) Número de goles marcados por un equipo y partidos ganados.

2.- ¿En qué casos de los siguientes las magnitudes son directa o inversamente proporcionales. Justificar respuesta.

a) Velocidad de un coche y tiempo empleado en hacer un recorrido.
b) Peso de carne y precio a pagar por ella.
c) Espacio recorrido por un coche y tiempo empleado en recorrerlo.
d) Número de pintores y tiempo empleado en pintar una valla.
e) Número de desagües de un depósito y tiempo empleado en vaciarlo.

3.- Di si los pares de magnitudes siguientes son directa o inversamente proporcionales.

a) El tiempo de funcionamiento de una máquina y la cantidad de electricidad que consume.
b) En las taquillas de un estadio deportivo, el número de ventanillas abiertas y el tiempo de espera en la cola.

c) Las llamadas telefónicas que se han efectuado y su importe.
d) La velocidad del procesador de un ordenador y el tiempo que tarda en procesar la información.

PROBLEMAS DE REGLA DE TRES SIMPLE (DIRECTA E INVERSA)

4) Regla de tres directa:

a) 35 ordenadores valen 42.000 euros. ¿Cuánto valen 40 ordenadores? ¿Cuánto vale 1 ordenador?.
b) En una hora realizo 12 ejercicios, ¿Cuánto tardo en realizar 51 ejercicios?

5) Regla de tres inversa:

a) Nueve trabajadores cargan un camión en 2 horas. ¿Cuánto tardan seis trabajadores?
b) Si tardo 2 horas en llegar a Madrid con una velocidad de 100 Km/h. ¿Cuánto tardo con una velocidad de 120 km/h?

6) Problemas de regla de 3 (directa e inversa)

1. Un ganadero tiene pienso suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántosdíaspodrá alimentar con la misma cantidad de pienso a 450 vacas?
2. Un kilopondio son 9,8 Newton. ¿Cuántoskp son 20 Newton?

7) Problemas de regla de 3 (directa e inversa)

1. Un corredor da 5 vueltas a una pista polideportiva en 15 minutos. Si sigue al mismo ritmo, ¿cuánto tardará en dar 25 vueltas?
2. Para recorrer los 360 km que hay entre Madrid y Valencia un coche tardó 3 horas a una velocidad de 120 km/h. Si disminuye la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto tardará?
3. En un taller de confección, si se trabajan 8 horas diarias se taran 6 días en servir un pedido. ¿Cuánto se tardará en servir el pedido si se trabajan 12 horas diarias?
4. Si 400 gramos de salmón ahumado cuestan 12 euros, ¿cuánto pagaré por 1,5 kg?
5. El coche recorre 309 km en 3 horas ¿cuántoskilómetros recorre en 7 horas?, ¿y en una hora?

8) Por tres horas de trabajo, Pedro ha cobrado 60 euros. ¿Cuánto cobrará por 8 horas?

9) Tres obreros descargan un camión en dos horas. ¿Cuántotardarán con la ayuda de dos obreros más?.

10) Tres kilogramos de carne cuestan 6 euros. ¿Cuánto podré comprar con 4,5 euros?.

11)Una moto va a 50 km/h y tarda 40 minutos en cubrir cierto recorrido. ¿Cuánto tardará un coche a 120 Km/h?.

12) Por 5 días trabajados Juan ha ganado 390 euros. ¿Cuánto ganará por 18 días?

13)Una máquina embotelladora llena 240 botellas en 20 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en hora y media?

14) Una moto que va a 100 km/h necesita 20 minutos en recorrer la distancia entre dos pueblos. ¿Qué velocidad ha de llevar para hacer el recorrido en 16 minutos?.

15) Un camión que carga 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesitará para hacer transportar la misma arena un camión que carga 5 toneladas?.

16)Un ganadero tiene 20 vacas y pienso para alimentarlas durante 30 días. ¿Cuánto tiempo le durará el pienso si se mueren 5 vacas?

17)Para hacer una tarta de queso de 3 kilos hemos de utilizar 1,20 kilos de queso. ¿Cuánto queso hemos de utilizar para hacer una tarta de 4,5 kilos?

18) Si 46 papeleras cuestan 368 euros, ¿cuánto cuesta cada papelera?

19) Un edificio es construido por una cuadrilla de 15 albañiles en 200 días. ¿Cuántosalbañilestendré que añadir a la cuadrilla para poder terminar el trabajo en 150 días?

20) Si por una prenda de ropa que costaba 80 euros he pagado 60 euros, ¿Qué porcentaje de descuento me han hecho?

PORCENTAJES

21) Calcula en cada caso;

a) el 25% de 1200 =
b) el 75% de ______ = 27
c) el___%de500=80

22) En un pueblo de 9800 habitantes el 56% son mujeres. ¿Qué porcentaje de varones hay? ¿Cuántos varones son?

23) Una camisa vale 40 euros. Me hacen una rebaja del 10%. ¿Cuánto debo pagar?.

24) Un artículo se rebaja de 2.700 euros a 2.400 euros. ¿Cuál es el porcentaje de rebaja?

25) Una camisa valía 72 € antes de las rebajas. ¿Cuánto costará si le aplican un descuento del 30%? ¿Cuánto la han rebajado?

26) Al comprar un producto nos rebajan un 8 %. Pagué 48.000 euros. ¿Cuál era el precio original?.

27) En un escaparate he visto el precio de un ordenador: 1000 euros + 16% de IVA. ¿Cuánto cuesta el ordenador?. Si sobre el precio total me hacen un descuento del 5% ¿Cuánto debo pagar por el ordenador?

28) El precio de una lavadora es 300 euros (IV A incluido). Si el comerciante decide no cobrarme el 16 % de IVA. ¿Cual es el precio de la lavadora sin IVA?.

29) Al abonar la carrera de un taxi decido pagar un 10% más del precio, costándome 8,25 euros. ¿Cual era el precio que señalaba el taxímetro?.

30) Calcula lo que le rebajan a una persona que debe 3425 euros, si se le hace una rebaja del 3% por ser buen cliente.

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

31) Por hacer un trabajo tres obreros han cobrado 20.400 euros. Uno trabajo 15 días, otro 12 días y el tercero 6 días, sin coincidir ningúndía trabajando. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?.

32) Un padre reparte entre sus tres hijos 144 € de forma directamente proporcional a sus edades, que son 14, 12 y 10 años, respectivamente. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno de ellos?

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

33) Un padre reparte entre sus tres hijos 420 € de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 3, 5 y 6 años, respectivamente. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno de ellos?

34) Repartir 20.000 en partes inversamente proporcionales a 2, 4 y 8.

PROBLEMAS PROPORCIONALIDAD (Repaso)

35) Ana trabaja de comercial de una empresa de manera que cobra el 5% del importe de ventas que realiza. ¿Cuánto necesita vender para ganar 2.404 euros?

36) Un padre le da la paga a sus tres hijas de forma que a cada una le corresponde una cantidad proporcional a su edad. A la mayor, que tiene 20 años, le da 50 euros. ¿Cuántodará a las otras dos hijas de 15 y 8 años de edad?

37) Un agricultor labra una determinada superficie en 12 horas utilizando dos tractores. ¿Cuánto tardará en labrarla si utiliza tres tractores?

38) Una receta de tarta de manzana nos especifica los siguientes ingredientes para 6 personas:

- 365 g. de harina
- 4 huevos
- 300 g. de mantequilla
- 250 g. de azúcar
- 6 manzanas

Calcula los ingredientes necesarios de una tarta de manzana para 15 personas.

39) Un taller de ebanistería, si trabaja 8 horas diarias, puede servir un pedido en 6 días. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar para servir el pedido en 4 días?

40) He comprado un teléfonomóvil por 40 euros. ¿A que precio debo venderlo para obtener un beneficio del 10%?

PROBLEMAS PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

41) 15 obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 30 días en realizar un trabajo. ¿Cuántosdíastardarán en hacer el mismo trabajo 10 obreros, empleando 8 horas diarias?

42) En una fábrica 5 máquinas llenan 7.200 envases en 6 horas. ¿Cuántos envases llenarán 7 máquinas en 8 horas?

43) Un crucero por el Mediterráneo para 200 personas durante 15 días necesita, para gastos de alojamiento y comida, 54.000 €. ¿Cuánto se gastará para alojar y alimentar a 250 personas durante 10 días?

44)Si18máquinasmueven1200m detierraen12días,¿cuántosdíasnecesitarán 24máquinasparamover1600m detierra?

45) Un motor funcionando durante 10 días y trabajando 8 horas diarias ha originado un gasto de 1200 euros. ¿Cuánto gastará el motor funcionando 18 días a razón de 9 horas diarias?.

46) Con 15 máquinas de escribir durante 6 horas, se escriben 220 folios. ¿ Cuantos folios se escribirán con 45 máquinas durante 12 horas?.

47) Un caminante recorre 120 Km. andando 8 horas diarias durante 5 días. ¿Cuántas horas necesitará para recorrer 129 Km en 12 días?.

48) Un depósito puede suministrar 12 litros diarios de agua para 25 familias durante 150 días. ¿Cuántos litros podrán suministrar a 40 familias durante 200 días?.

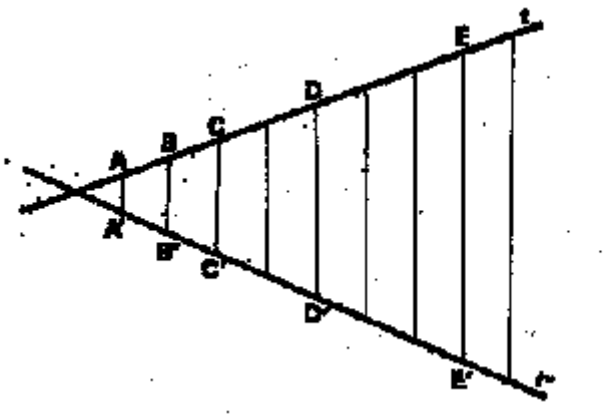
49) Para construir 4 jardines se tardan 30 días, trabajando en ellos 120 jardineros. ¿Cuántos jardineros se necesitarán para construir 6 jardines empleando 60 días?

50) Diez agricultores siembran un terreno de 10.000 metros cuadrados en 9 días. ¿Cuántosdíastardarán 12 trabajadores en sembrar 15.000 metros cuadrados?.

TEMA 4: TEOREMA DE THALES

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS. TEOREMA DE TALES

Consideremos dos rectas concurrentes r y r'. Sobre cada una de ellas tomamos segmentos iguales interceptados por un conjunto de rectas paralelas.



En la figura se puede observar que:

En la recta r:

$$\frac{CD}{AB}=2,\ \frac{DE}{AB}=3 \rightarrow \frac{DE}{CD}=\frac{3}{2}$$

En la recta r':

$$\frac{C'D'}{A'B'}=2,\ \frac{D'E'}{A'B'}=3 \rightarrow \frac{D'E'}{C'D'}=\frac{3}{2}$$

Puede escribirse:

$$\frac{DE}{CD}=\frac{D'E'}{C'D'}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}$$

Igualmente:

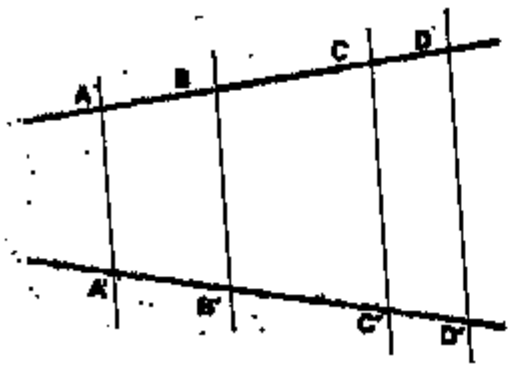
$$\frac{DE}{AB}=\frac{D'E'}{A'B'}\,; \qquad \frac{A'B'}{AB}=\frac{D'E'}{DE}$$

Considerando los tres pares de segmentos será:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}.$$

A esta conclusión llego Thales de Mileto En al siglo VI a. C. Y lo anuncio así:

Los segmentos interceptados sobre dos rectas concurrentes por un conjunto de paralelas son proporcionales.



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=k$$

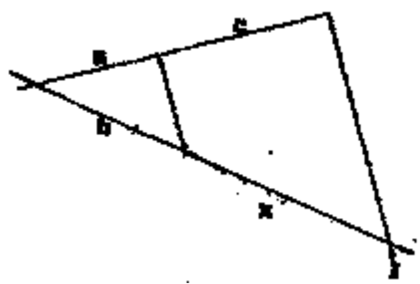
El valor de k es el de la constante o razón de proporcionalidad.

Los segmentos **A'B', B'C'** y **C'D'** reciben el nombre de proyección paralela de los segmentos **AB, BC** y **CD** respectivamente. Son sus segmentos homólogos.

<u>APLICACIONES DEL TEOREMA DE THALES</u>

Segmento **cuarto proporcional** a tres segmentos dados a, b y c es el segmento x que verifica

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}.$$

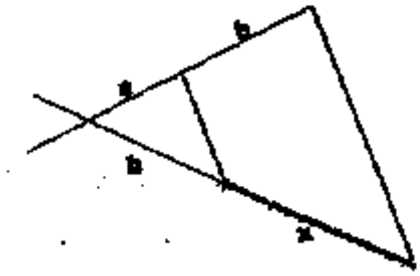


Segmento **tercero proporcional** a dos segmentos dados a y b es el segmento x que verifica

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{x}.$$

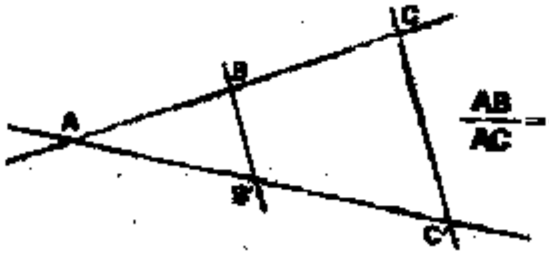
La construcción es como la anterior pero con c= b.

Observa la figura.



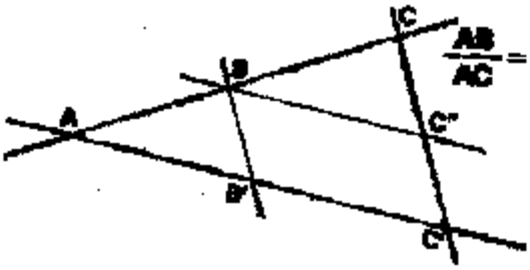
<u>TRIÁNGULOS DE LADOS PROPORCIONALES</u>.

En los triángulos **AB'B** y **AC'C**, por el teorema de Thales, se verifica:



$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$$

Si por **B** trazamos una paralela a la recta **AC'**, se obtiene el punto **C''**. Aplicando ahora el teorema de Thales a las rectas **AC** y **CC'**, tenemos:



$$\frac{AB}{AC}=\frac{C'C''}{C'C}$$

Pero **C'C''** = **B'B** por paralelismo.

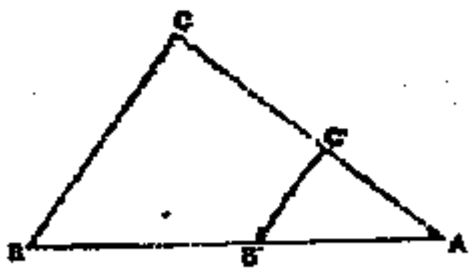
Por lo que:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{B'B}{C'C}$$

Proporción que comparada con la primera nos permite escribir:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\frac{B'B}{C'C}$$

Si en un triángulo **ACB**, se dibuja una paralela a uno de sus lados, se obtiene un nuevo triángulo **AC'B'** que diremos que está en **posición de Thales** respecto al primero. Entre los lados de los dos triángulos se verifica:

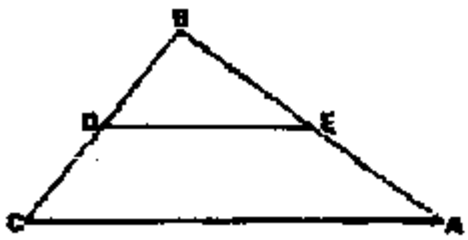


$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Dos triángulos en posición de Thales tienen los lados proporcionales.

AB', AC' y **B'C'** son los lados homólogos de los lados **AB, AC** y **BC** respectivamente.

Si en un triángulo **ABC** se traza una recta paralela a un lado, el **CA**, por el punto medio de otro, el **BC**, se obtiene el segmento **DE**. Tenemos dos triángulos **ABC** y **EBD** que están en posición de Thales, luego tienen los lados proporcionales.



$$\frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{CA}$$

$$BD = \frac{1}{2} BC$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$$

Por ser **D** el punto medio del lado **BC**, es

Por lo tanto:

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{CA} = \frac{1}{2}$$

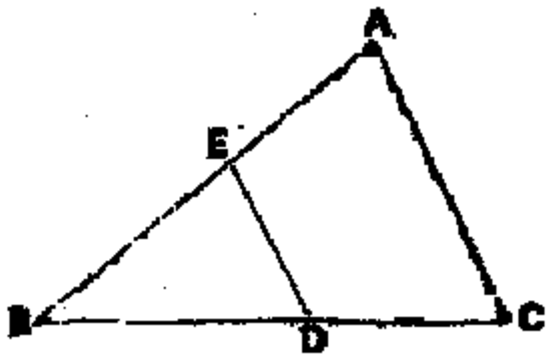
Así:

$$DE = \frac{1}{2} CA$$

El segmento **DE** recibe el nombre de **paralela media** del triángulo **ABC** y mide la mitad de su lado paralelo.

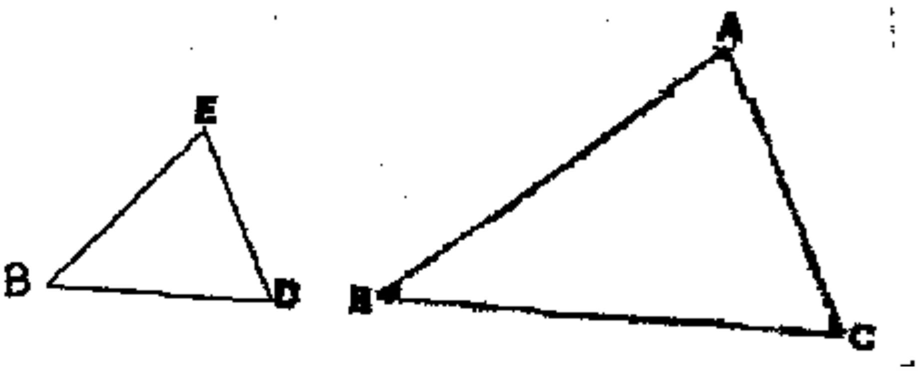
TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Acabamos de ver que dos triángulos en posición de Thales tienen los lados proporcionales. Si movemos uno de los triángulos, estos seguirán teniendo los lados proporcionales:



$$\frac{EB}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{CA} = k$$

Diremos que los triángulos **ABC** y **EBD** son **semejantes**, y al valor de la constante k le llamaremos **razón de semejanza**.



Si observamos los triángulos **ABC** y **EBD** en posición de Thales, vemos que tienen los tres ángulos iguales, ya que:

$\hat{B}$ Es común y

$$\hat{C} = \hat{D}$$
$$\hat{A} = \hat{E}$$

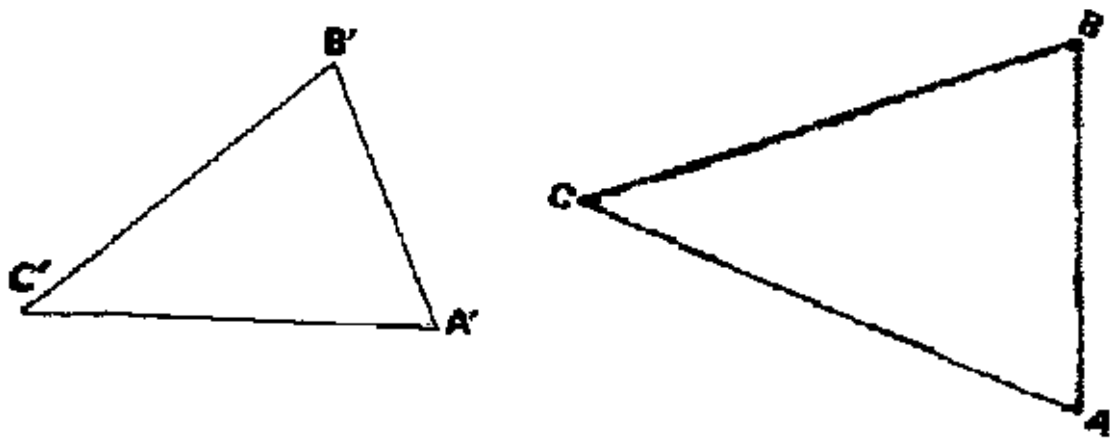
Por correspondientes

Dos triángulos semejantes tienen los tres ángulos iguales.

Observa que los lados homólogos son los opuestos a los ángulos respectivamente iguales. Debes tenerlo en cuenta al escribir las proporciones entre dichos lados.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dados dos triángulos **ABC** y **A'B'C'**, para saber si son semejantes, basta con mover uno sobre el otro de modo que queden en posición de Thales. Si ello es posible, **ABC** y **A'B'C'** serán semejantes.



Veamos los casos en que esto ocurre.

Primer caso: Los triángulos **ABC** y **A'B'C'** tienen dos ángulos iguales.

$$\hat{B} = \hat{B}' \text{ y } \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} + \hat{C} = \hat{B}' + \hat{C}' \\ \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \\ \hat{A}' = 180^\circ - (\hat{B}' + \hat{C}') \end{array}\right\} \quad \hat{A} = \hat{A}'$$

Tienen los tres ángulos iguales, luego pueden ponerse en posición de Thales.

Dos triángulos con dos ángulos iguales son semejantes.

<u>Segundo caso</u>: Los triángulos **ABC** y **A'B'C'** tienen los tres lados proporcionales.
Esto implica que tengan los tres ángulos respectivamente iguales, por lo que podrán ponerse en posición de Thales.

Dos triángulos con los tres lados proporcionales son semejantes.

<u>Tercer caso</u>: Si los triángulos **ABC** y **A'B'C'** son tales que

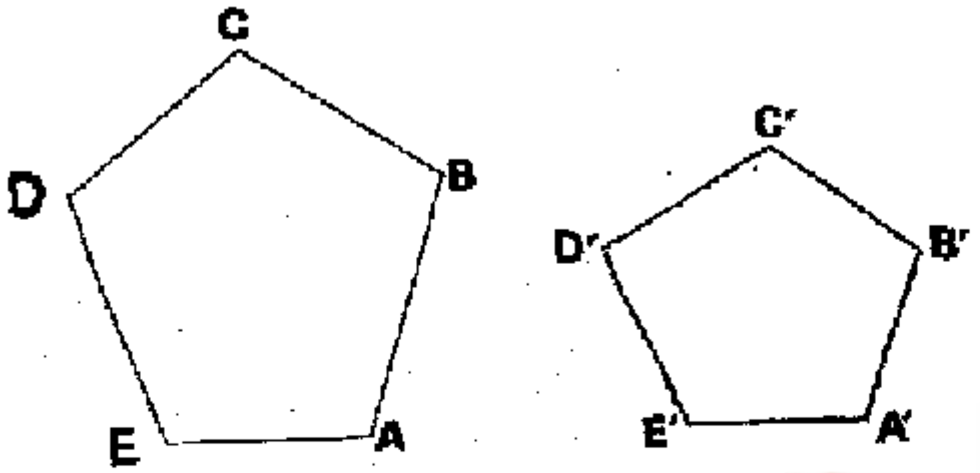
$\hat{B} = \hat{B}'$ y $$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'A'}{BA}$$

Podrán colocarse en posición de Thales haciendo coincidir el ángulo igual.

Dos triángulos que tengan dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual son semejantes.

<u>FIGURAS SEMEJANTES</u>

Dos polígonos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales



Diremos que los polígonos **ABCDE** y **A'B'C'D'E'** son semejantes si:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = k$$

k es la **razón de semejanza** entre los dos polígonos.

Por ser semejantes, sus ángulos correspondientes serán iguales, ya que pueden considerarse ángulos de los triángulos semejantes, que resultan de la triangulacion de cada polígono.

Los polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales.

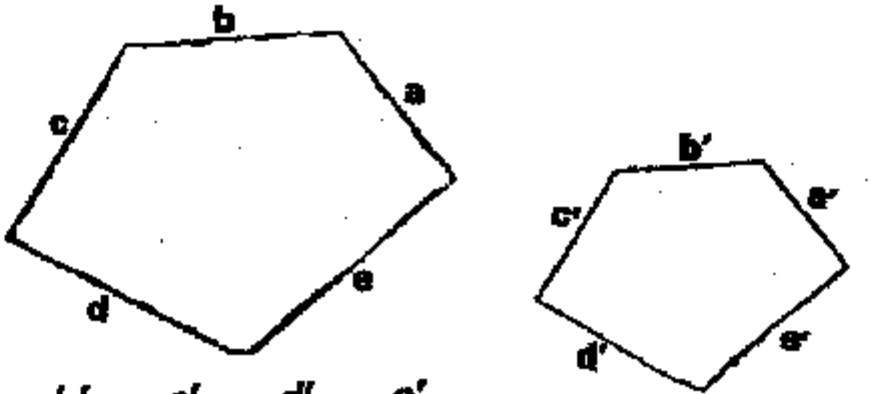
La semejanza es una relación que puede hacerse extensiva a cualquier figura.

Dos circunferencias son siempre semejantes. La razón de semejanza es la razón entre sus radios.

Dos planos de una misma ciudad, a escalas distintas, son semejantes.

PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS SEMEJANTES

Estos dos polígonos son semejantes con razón de semejanza k, luego se verifica:



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = k$$

Observa que se trata de una serie de razones iguales, a la que podemos aplicar su propiedad fundamental:

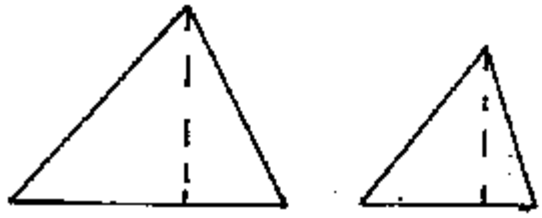
$$\frac{a' + b' + c' + d' + e'}{a + b + c + d + e} = k$$

Donde numerador y denominador son los respectivos perímetros de los dos polígonos semejantes, luego:

$$\frac{P'}{P} = k.$$

La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

Estos dos triángulos son semejantes, con razón de semejanza k. Vamos a encontrar la razón que existe entre sus áreas



Podemos observar que los dos triángulos que se forman al dibujar las respectivas alturas *a* y *a'* son también respectivamente semejantes.

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = k$$

Calculamos la razón entre sus áreas.

$$\frac{A'}{A} = \frac{1/2\ b' \cdot a'}{1/2\ b \cdot a} = \frac{b'a'}{ba} = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a'}{a} = k \cdot k = k^2$$

La razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Esta conclusión es extensiva a todos los polígonos y figuras.

$$\frac{A'}{A} = k^2$$

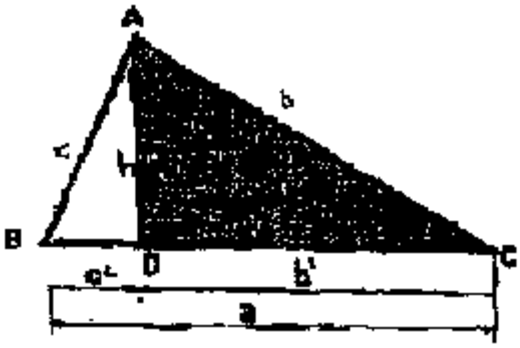
<u>La escala como razón de semejanza:</u> Loa mapas, fotografías, planos, etc., son representaciones de figuras u objetos reales por medio de figuras semejantes.

La **escala** es la razón de semejanza entre el dibujo y el objeto real.

$$\textbf{Escala} = \frac{\text{Longitud del plano}}{\text{Longitud real}}$$

RELACIONES MÉTRICAS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Observa el triángulo **ABC** de la figura:



- **a** es la hipotenusa.
- **b, c** son los catetos.
- **h** es la altura correspondiente a la hipotenusa.
- **b'** y **c'** son las proyecciones ortogonales respectivas de los catetos **b** y **c** sobre la hipotenusa.

Al trazar la altura **h**, el triángulo rectángulo **ABC** ha quedado dividido en dos triángulos rectángulos: **ABD** y **ADC**.

Estos dos triángulos son semejantes: Puesto que son triángulos rectángulos tienen todos un ángulo igual a 90°. Para probar su semejanza, es suficiente ver que tienen un ángulo agudo igual de acuerdo con el primer criterio de semejanza.

Los triángulos rectángulos **ABC** y **ADC** tienen el ángulo **C** que es común a ambos. Son semejantes.

Los triángulos rectángulos **ABD** y **ABC** tienen el ángulo **B** que es común a ambos. Son semejantes.

Los ángulos $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{A}}$ de los triángulos rectángulos **ABD** y **ADC** son iguales, pues son ángulos agudos de lados perpendiculares. Los triángulos **ABD** y **ADC** son semejantes.


A
B
D
A
D
C

TEMA 4 : TEOREMA DE THALES

1.- Los lados de un triángulo son proporcionales a 11, 13 y 15. Su perímetro mide 546 cm. Calcula sus lados.

2.- Los lados de un pentágono son proporcionales a 13, 14, 15, 16, 17. Su perímetro es 1.050 cm. Calcula sus lados.

3.- El perímetro de un triángulo es 48 cm. Otro triángulo semejante al anterior tiene de lados 42, 54 y 48 cm. Calcula los lados del primer triángulo.

4.- Los lados de un triángulo miden 36, 42 y 53 cm. Otro triángulo semejante al primero tiene de perímetro 393 cm. Calcula los lados del segundo triángulo y la razón de semejanza entre ambos triángulos.

5.- La razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes es k = 4/5 . Los lados del menor miden 12, 16 y 20 cm. Calcula los lados del mayor.

6.- Un lado $\underline{AB}$ de un triángulo mide 45 cm. El lado $\underline{A'B'}$ homólogo de $\underline{AB}$ de otro triángulo semejante al primero mide 35 cm. Calcula la razón de semejanza de sus perímetros y de sus áreas.

7.- En el triángulo ABC el lado AB mide 105 cm. y el lado AC = 108 cm. A partir de “A” llevamos 35 cm. sobre el lado AB ¿Qué distancia debemos tomar sobre AC para que al unir ambos puntos nos resulte una paralela a BC?

8.- Dos lados de un triángulo miden 70 y 56 cm. respectivamente. A partir del vértice común llevamos una longitud de 12 cm. sobre el primer lado. ¿Qué longitud debemos llevar sobre el segundo para que al unir dichos puntos obtengamos una paralela al tercer lado?

9.- Una paralela a un lado de un triángulo determina en él dos segmentos de 36 y 48 cm. ¿Qué segmentos determina en el otro si su longitud es de 105 cm.?

10.- Las bases de un trapecio isósceles miden 15 y 12 cm. Sus lados iguales 8cm. Calcula el perímetro del triángulo isósceles obtenido al prolongar los lados no paralelos.

11.- Las áreas de los polígonos semejantes son 243,36 y 357,21 cm. El perímetro del menor es 66,3 cm. ¿Calcula el del mayor?

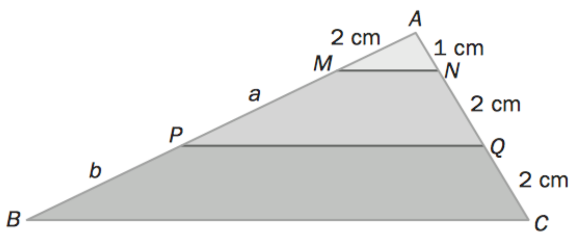
12.- Dos triángulos rectángulos son semejantes. Los catetos del menor miden 18 y 24 cm. La superficie del mayor es 1.350 cm^2. Calcula los lados del segundo triángulo.

13.- Las bases de un trapecio isósceles miden 76 y 40 cm. Su perímetro es 176 cm. Otro trapecio semejante al primero tiene una superficie 25 veces mayor. Calcula el área del primero y los lados del segundo.

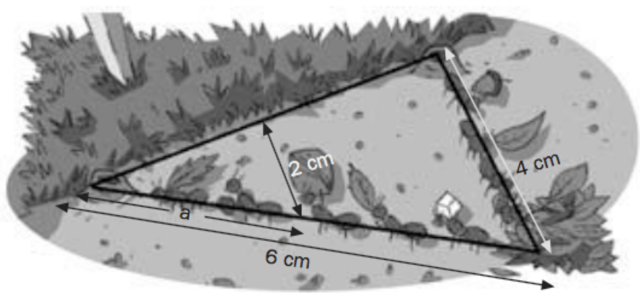
EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN

TEOREMA DE THALES

1. El lado de un triángulo equilátero mide 4 cm y el de otro triángulo equilátero 6 cm. ¿Son semejantes ambos triángulos? ¿Por qué? En caso afirmativo, calcula la razón de semejanza.
2. Los lados de un triángulo miden 3 cm, 7 cm y 8 cm. ¿Cuántomedirán los lados de un triángulo semejante al anterior si la razón, del primero al segundo, es r=2?
3. Los lados de un triángulo miden 2, 5 y 7 cm y los de otro 4, 10 y 13 cm. ¿Son semejantes? En caso afirmativo, calcula la razón de semejanza.
4. Un muro proyecta una sombra de 32 m al mismo tiempo que un bastón de 1,2 m proyecta una sombra de 97 cm. Calcula la altura del muro. (DÍFICIL)
5. ¿Dos triángulosequiláteros son siempre semejantes? ¿Y dos triángulosisósceles? Razona la respuesta.
6. Los lados *MN*, *PQ* y *BC* son paralelos. ¿Cuánto miden los segmentos *a* y *b*?

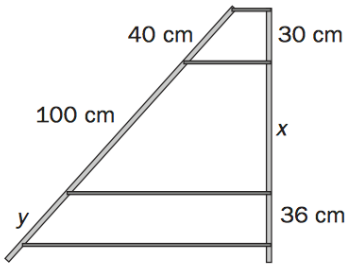


7. Los siguientes triángulos se encuentran en posición de Tales. Calcula la medida del lado a.

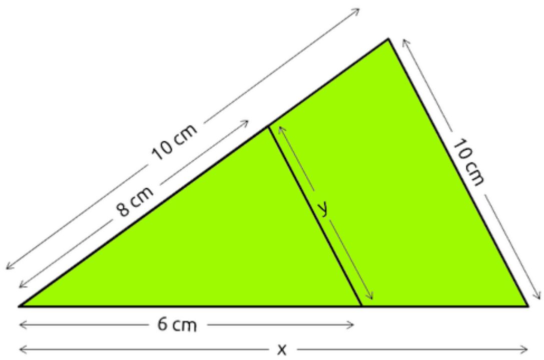


8. Un cuadrado de 6 cm de lado es semejante a otro. Calcula el lado del otro cuadrado si la razón de semejanza de sus áreas es 25. ¿Y si es 9/4?

9. Los peldaños de esta escalera son paralelos y se ha roto uno de ellos. ¿Cuánto miden los tramos *x* e *y*?



10. Un poste vertical de 6m de alto proyecta una sombra de 4m. ¿Qué sombra proyectará a la misma hora una persona de 1,8 m de altura?
11. El área de un cuadrado es 81 cm^2. Calcula la longitud del lado de otro cuadrado semejante sabiendo que su razón de semejanza es 5.
12. En un triángulo de vértices A,B y C, el lado AB mide 50 cm y el lado AC 30 cm. Si desde un punto del lado AB, situado a 20 cm del vértice A, trazo una paralela a BC, ¿en qué punto del lado AC se corta (distancia respecto a A)?
13. Halla el valor de *x* e *y*.

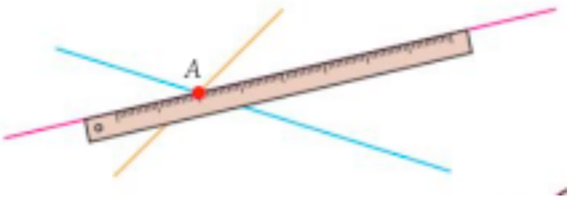


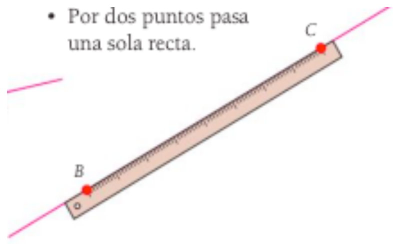
TEMA 5: GEOMETRÍA

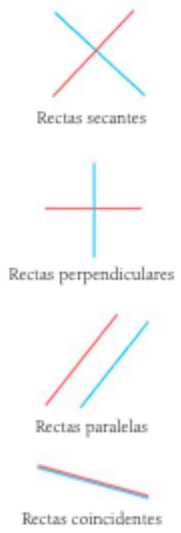
RECTA

Una **recta** es una línea sin principio ni final formada por infinitos puntos.

Como la recta no tiene ni principio ni final, no podemos dibujarla entera y por eso representamos solo una parte de ella.





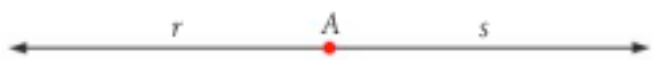


POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

- **Secantes**: cuando se cortan en un punto.
- **Perpendiculares**: son dos rectas secantes que dividen el plano en cuatro partes iguales.
- **Paralelas**: si no tienen ningún punto en común.
- **Coincidentes**: cuando todos sus puntos son comunes.

SEMIRRECTAS Y SEGMENTOS

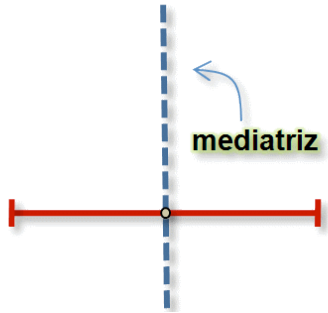
Una **semirrecta** es una recta que tiene principio pero no final.
Cada punto de una recta es origen de dos semirrectas.



Un segmento es la parte de una recta delimitada por dos puntos. El segmento tiene principio y final.

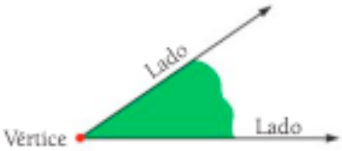
A y B se llaman **extremos del segmento**.
Al segmento de extremos A y B se le llama segmento AB.

Mediatriz de un segmento



La **mediatriz** de un segmento AB, es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio, el punto que divide al segmento en dos partes iguales.

ÁNGULOS



Llamamos **ángulo** a la abertura formada por dos semirrectas que parten de un mismo punto.

A cada semirrecta se la denomina **lado** y el punto se llama **vértice.**

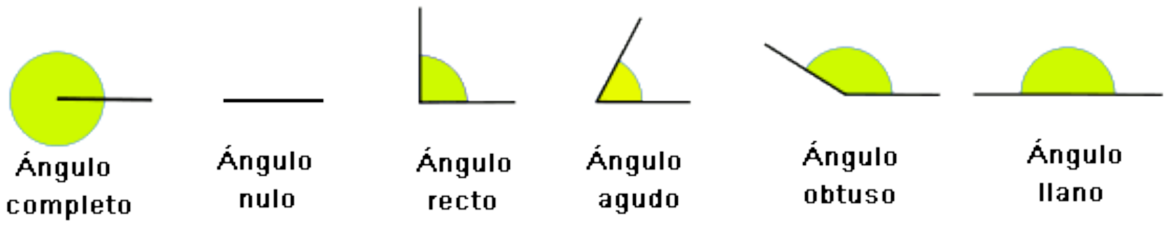
Representación:

Con el símbolo ^ encima de la letra del vértice (en este caso F)

Con el símbolo ^ sobre las tres letras que determinan el ángulo HFG

Clasificación de ángulos

- **Ángulo nulo**: sus lados son coincidentes y no tienen abertura.
- **Ángulo recto**: sus lados son perpendiculares y su abertura es la cuarta parte del total.
- **Ángulo agudo**: su abertura es inferior a la de un ángulo recto.
- **Ángulo llano**: sus lados forman una recta y su abertura es la mitad del total.
- **Ángulo obtuso:** su abertura es superior a un ángulo recto e inferior a uno llano.
- **Ángulo total**: sus lados son coincidentes y su abertura ocupa todo el plano.



Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta cuyo origen es el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos iguales.

TRIÁNGULOS

Un triángulo es un polígono de tres lados, que tiene también tres ángulos y tres vértices.

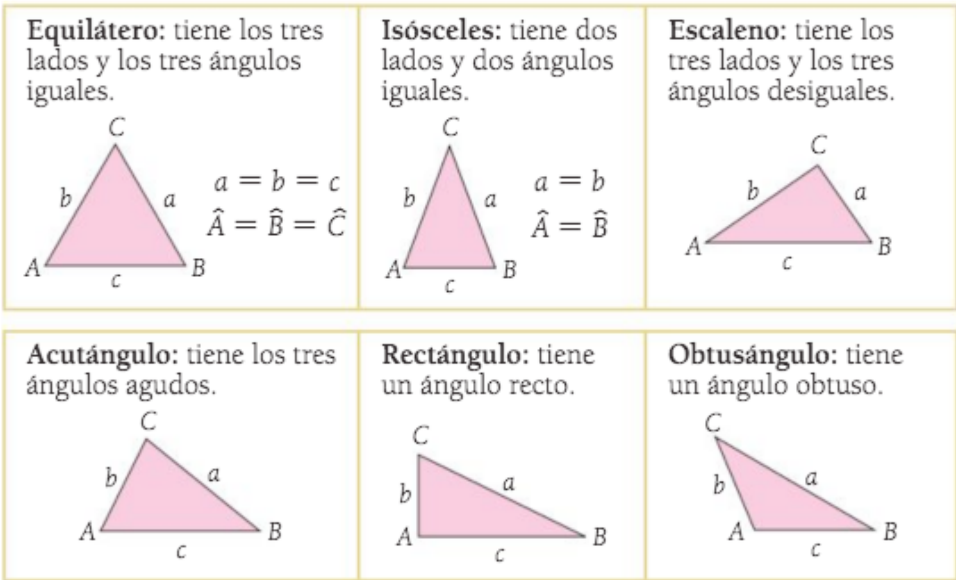
Elementos de un triángulo

- **Vértices**: son los puntos donde se juntan dos lados. Se suelen designar con letras mayúsculas (A, B, C).
- **Lados**: son los tres segmentos que delimitan el triángulo. Se designan con las mismas letras que los vértices, en minúsculas (a,b,c) de manera que el lado opuesto del vértice A es el lado a…

- **Ángulos:** son los formados por cada 2 lados. Se nombran con la misma letra que el vértice con el símbolo ^ encima ($\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$)

Clasificación de triángulos

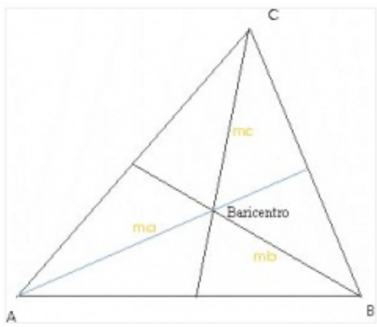
Según sean sus lados y sus ángulos, los triángulos se clasifican en:



RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

Medianas

Las **medianas** de un triángulo son las rectas que se obtienen al unir cada uno de los vértices con el punto medio del lado opuesto.

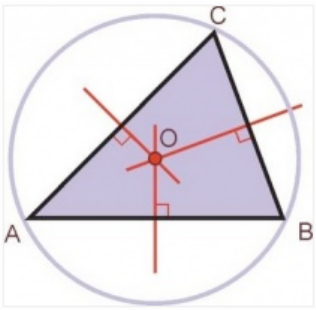


Mediatrices

Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a sus lados que pasan por su punto medio.

Las mediatrices se cortan en un punto situado a la misma distancia de los tres vértices del triángulo que se llama **circuncentro**.

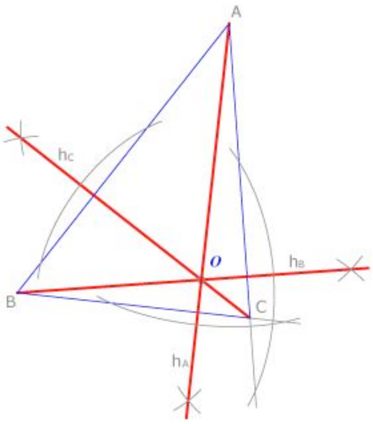
Con centro en el circuncentro y radio la distancia a cualquiera de los vértices, podemos trazar una circunferencia que pasa por los tres vértices; se llama **circunferencia circunscrita**.



Alturas

Las **alturas** de un triángulo son las rectas perpendiculares a sus lados, o su prolongación, trazadas desde el vértice opuesto.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **ortocentro**.

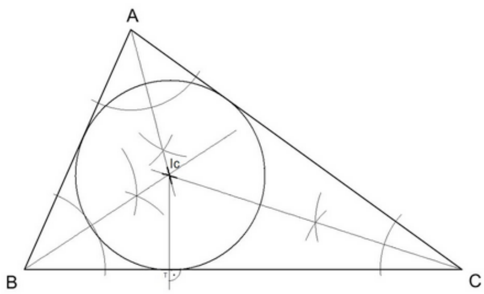


Bisectrices

Las bisectrices de un triángulo son las rectas que dividen cada uno de sus ángulos en dos partes iguales.

Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado incentro.

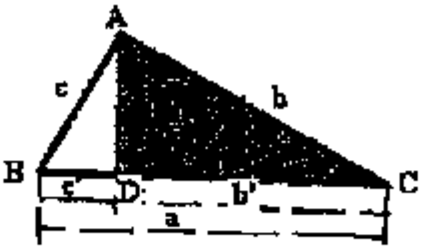
Con centro en este punto y radio la distancia a cualquiera de los lados, podemos trazar una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo, que se llama **circunferencia inscrita**.



TEOREMA DE LA ALTURA:

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura correspondiente a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones ortogonales de los catetos sobre ella.

En todo triángulo rectángulo la altura es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa.



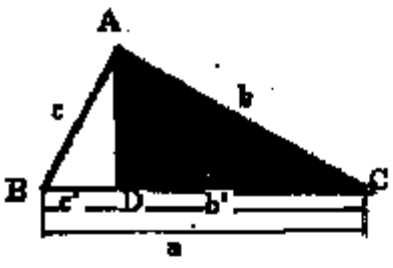
$$\frac{b'}{h} = \frac{h}{c'} \qquad h^2 = b' \cdot c'$$

TEOREMA DEL CATETO:

Sabemos que los triángulos **ABC** y **ABD** son semejantes sus lados homólogos son proporcionales.

En un triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por su proyección ortogonal sobre ella.

En todo triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección ortogonal sobre ella.



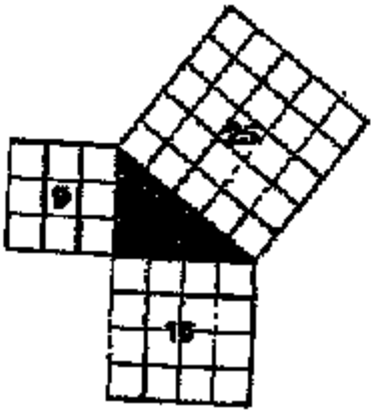
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \qquad c^2 = a \cdot c'$$

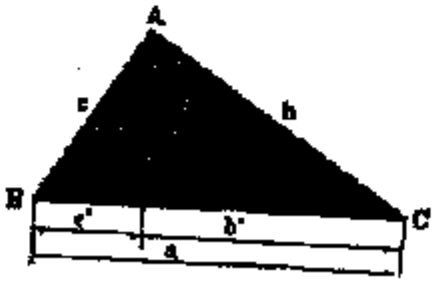
Siguiendo un proceso análogo con los triángulos **ABC** y **ADB**, obtendríamos un resultado equivalente para el otro cateto:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} \qquad b^2 = a \cdot b'$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

A partir del teorema del cateto, observa el triángulo **ABC**





Por el teorema del cateto podemos escribir que:

$$b^2 = a \cdot b' \quad ; \qquad c^2 = a \cdot c'$$

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades se obtiene otra igualdad:

$$b^2 + c^2 = ab' + ac' = a\,(b' + c')$$

Y puesto que: $b' + c' = a$

Sustituyendo en la expresión anterior tendremos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot a = a^2 \quad ; \qquad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

El teorema de Pitágoras permite calcular los tres lados de un triángulo rectángulo si se conocen dos de ellos:

- Conocidos los dos catetos **b** y **c**, la hipotenusa **a** será:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

- Conocidos la hipotenusa **a** y el cateto **b**, el otro cateto **c** será:

$$\mathbf{c} = \sqrt{\mathbf{a^2 - b^2}}$$

- Conocidos la hipotenusa **a** y el cateto **c**, el otro cateto **b** será:

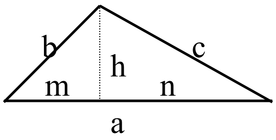
$$\mathbf{b} = \sqrt{\mathbf{a^2 - c^2}}$$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

- **Cálculo de la altura de un triángulo**
- **Cálculo de la diagonal de un rectángulo**
- **Cálculo de los lados de un rombo**
- **Cálculo de cualquier elemento de una figura donde se pueda formar un triángulo rectángulo.**

TEMA 5: TEOREMA DE ALTURA, CATETO Y PITÁGORAS

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $\quad \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n}$



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot m}$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $\quad \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot n}$

$a = m + n$

1.- Los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 y 16 cm. Calcula sus proyecciones y la altura relativa a la hipotenusa.

2.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 cm y uno de sus catetos 27 cm. Calcula las proyecciones y la altura relativa a la hipotenusa.

3.- Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo miden 72 y 128 cm. Calcula los catetos y la altura relativa a la hipotenusa.

4.- Un cateto de un triángulo rectángulo mide 42 cm. y su proyección 25,2 cm. Calcula el otro cateto, su proyección y la altura relativa a la hipotenusa.

5.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 y 36 cm. La hipotenusa de otro semejante al primero mide 80 cm. Calcula la hipotenusa y los catetos del segundo.

6.- Un cateto de un triángulo rectángulo mide 64 cm. y la altura relativa a la hipotenusa mide 38,4 cm. Calcula el otro cateto y su proyección.

7.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 21,6 y 28,8 cm. Calcula la altura relativa a la hipotenusa.

8.- Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo miden 32,4 y 57,6 cm. Calcula los catetos.

9.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm. Los catetos de otro triángulo semejante al primero miden 20 y 48 cm. Calcula los catetos del primero y la hipotenusa del segundo.

10.- La altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a ésta en dos segmentos de 12 y 48 cm. Calcula dicha altura y las longitudes de los catetos.

11.- Una escalera de 13 m. de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 5 m. de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

12.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 8 y 15 cm. Calcula los lados de otro triángulo semejante al primero sabiendo que la razón de semejanza es 4/5.

13.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. La proyección del cateto menor 32,4 cm. Calcula los catetos y la altura relativa a la hipotenusa.

14.- Un cateto de un triángulo rectángulo mide 25 cm. y su hipotenusa 65 cm. Calcula su perímetro y su área.

15.- Halla el área de un triángulo equilátero de lado 48 cm.

16.- La diagonal de un rectángulo mide 51 cm. y su altura 24 cm. Calcula su área y su perímetro.

17.- El lado de un rombo mide 39 cm. y su diagonal mayor 72 cm. Calcula su área.

18.- Halla el área de un triángulo equilátero de altura 36 cm.

19.- Halla el área de un triángulo equilátero de radio 54 cm.

20.- Halla el área de un triángulo equilátero de apotema 24 cm.

21.- La diagonal menor de un rombo mide 48 cm. y su lado 51 cm. Calcula su área.

22.- Las bases de un trapecio rectángulo mide 30 y 46 cm. El lado no perpendicular a las bases mide 34 cm. Calcula su perímetro y su área.

23.- Las bases de un trapecio isósceles miden 18 y 28 cm. Su altura mide 12 cm. Calcula su perímetro.

24.- El perímetro de un hexágono es 132 cm. Calcula su área.

25.- Las diagonales de un trapecio rectángulo miden 13 y 20 cm. Su altura 12 cm. Calcula su área.

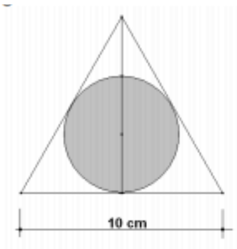
26.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 51 y 68 cm. Calcula sus proyecciones y la altura relativa a la hipotenusa.

27.- Un cateto de un triángulo rectángulo mide 64 cm. Su proyección 51,2 cm. Calcula la altura relativa a la hipotenusa y su perímetro.

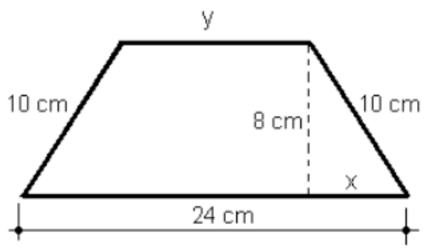
EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN

TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Calcula el perímetro de un triangulo rectángulo cuya hipotenusa mide 50 cm, y uno de sus catetos 40 cm.
2. Determina, sin dibujarlo, si un triángulo cuyos lados miden 7, 8 y 9 cm es rectángulo.
3. Halla el apotema de un hexágono de 5 cm de lado. (NO)
4. Calcula la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 16 cm y el lado desigual 10 cm.
5. Halla la medida de la diagonal de un rectángulo de lados 6 y 8 cm.
6. Una escalera de 65 dm de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 25 dm de la pared. ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared?
7. Una escalera de bomberos de 14,5 metros de longitud se apoya en la fachada de un edificio, poniendo el pie de la escalera a 10 metros del edificio. ¿Qué altura, en metros, alcanza la escalera?
8. Halla la medida de la altura de un trapecio rectángulo, cuya base mayor mide 28 metros, su base menor 20 metros y su lado oblicuo 17 metros
9. En un triángulo equilátero de 10 centímetros de lado se inscribe una circunferencia. Calcula el radio de la circunferencia, sabiendo que es la tercera parte de la altura del triángulo.



10. Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 32 mm y 24 mm.
11. Calcula el perímetro de este trapecio.



12. Dentro de un rectángulo de largo 5 m y ancho 14 m introduzco un rombo cuyos vértices tocan con los lados en el centro ¿Cuánto mide el área del rombo?

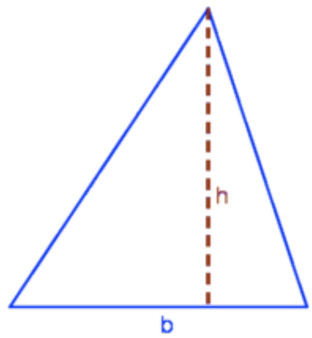
TEOREMA DEL CATETO Y DE LA ALTURA

13. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 40 cm y su proyección sobre la hipotenusa 32 cm. ¿ Cuál es la longitud de la hipotenusa? ¿Cuál la del otro cateto?
14. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 36 dm y la proyección sobre ella de uno de los catetos es de 16 dm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?
15. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 91 cm y un cateto 35 cm . Calcular el valor del otro cateto, las proyecciones sobre la hipotenusa y el área del triángulo.
16. La proyección de un cateto sobre la hipotenusa mide 32 cm, y la altura correspondiente a la misma es de 24 cm. Hallar el perímetro del triángulo.
17. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 40 cm y la altura correspondiente a la hipotenusa a la hipotenusa mide 30 cm. Hallar el área del triángulo.

TEMA 6: ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS

El área es una medida de extensión de una superficie, expresada en unidades de medida denominadas unidades de superficie. El área es un concepto métrico que requiere que el espacio donde se define o especifique una medida.

ÁREA DEL TRIÁNGULO



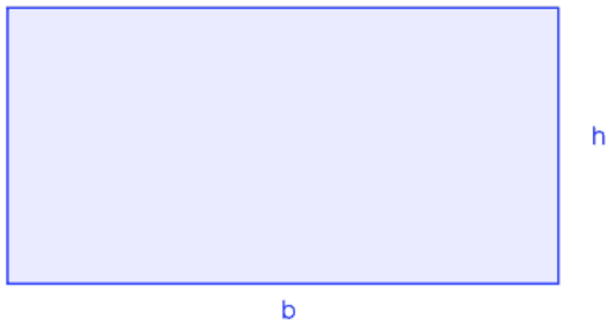
$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Área del triángulo

b = base del triángulo

h = altura del triángulo

ÁREA DEL RECTÁNGULO



$$A = b \times h$$

b = base del rectángulo

h = altura del rectángulo

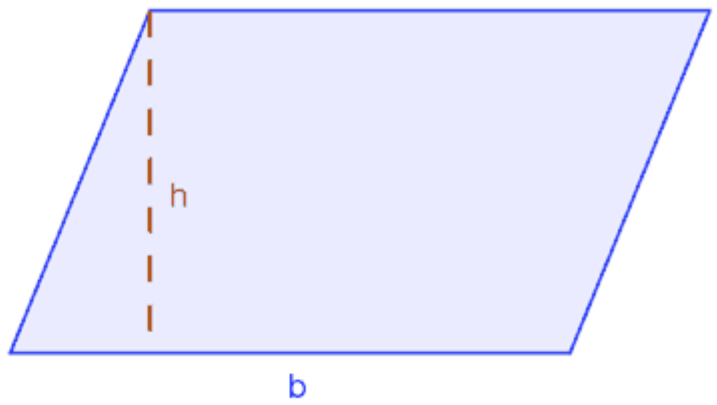
ÁREA DEL CUADRADO

$$A = L \times L = L^2$$

Área del cuadrado

l = lado del cuadrado

ÁREA DEL PARALELOGRAMO



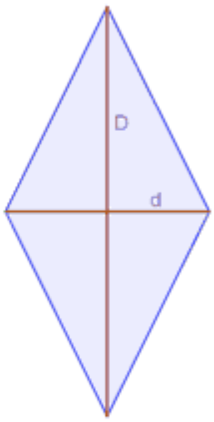
$$A = b \times h$$

Área del paralelogramo

b = base del paralelogramo

h = altura del paralelogramo

ÁREA DEL ROMBO



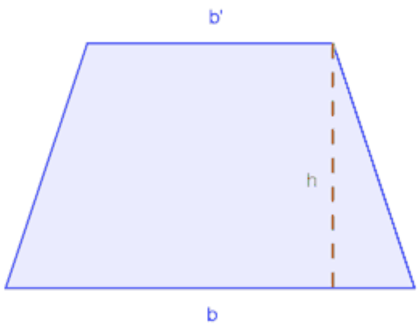
$$A = \frac{D \times d}{2}$$

Área del rombo

D = diagonal mayor del rombo

d = diagonal menor del rombo

ÁREA DEL TRAPECIO



$$A = \frac{b + b'}{2} \times h$$

Área del trapecio

b = base mayor del trapecio

b’ = base menor del trapecio

h = altura del trapecio

ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES

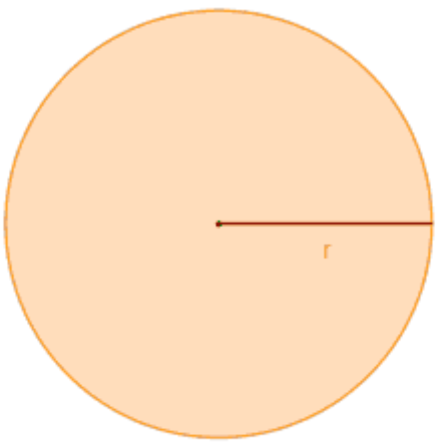
Él área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por la apotema.

$$A_{\text{polígono regular}} = \frac{P \times a}{2}$$

P = Perímetro del polígono

a = apotema del polígono

ÁREA DEL CÍRCULO



$$A = \pi \times r^2$$

Área del círculo

$\pi = 3{,}1416$

r = radio del círculo

TEMA 6: PROBLEMAS DE ÁREAS

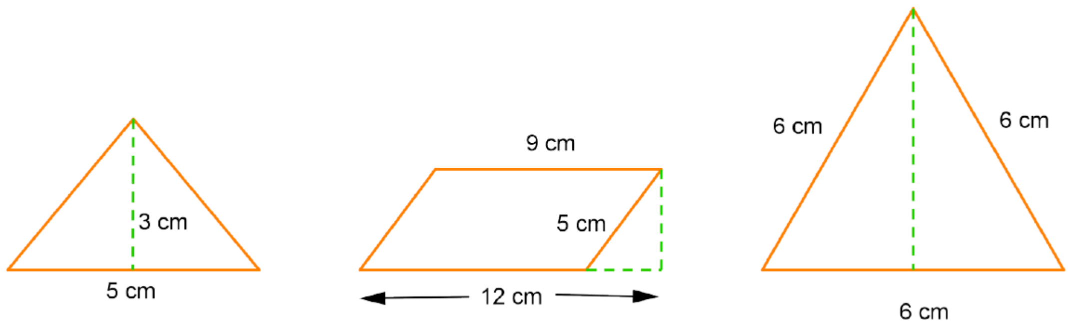
1.- Halla el área de un rectángulo cuya altura mide 2 cm y su base mide tres veces su altura.

2.- Calcula el área de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.

3. Calcula el lado de un cuadrado de área 16 cm.
.
4. Calcula el área en metros cuadrados de un cuadrado que tiene 10 dm de lado
.
5. Calcula el área de un triángulo cuya base es 10 cm y su altura mide 6cm.

6. Calcula el área de un triángulo cuya base mide 5 cm y su altura es el doble de la base.

7. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:



8. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:

a) Un rombo de diagonales 24 cm y 16 cm.

b) Un trapecio sabiendo que la base menor mide 10 cm , la base mayor es doble que la menor y la altura mide 8 cm.

9. Halla el área y la diagonal de un cuadrado de 20 cm de lado.

10. De un rectángulo se sabe que su área mide 52 dm^2 y su altura mide 4 dm. Halla la base.

11. Halla la medida de la altura de un triángulo sabiendo que el área es 200 dm^2 y la base 50 cm.

12. En un rombo, la diagonal mayor mide 8 cm y el lado 5 cm. Halla la diagonal menor y el área.

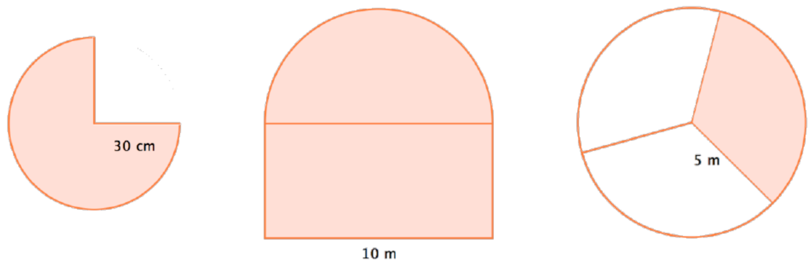
13. De un trapecio isósceles conocemos sus bases, 26 cm y 36 cm y sus lados oblicuos, 13 cm. Halla la altura y el área.

14. Halla el área de un círculo de 20 cm de diámetro.

15. Halla el radio de una circunferencia cuya longitud es 12,56 cm.

16. Halla el área de un semicírculo de 18 cm de radio.

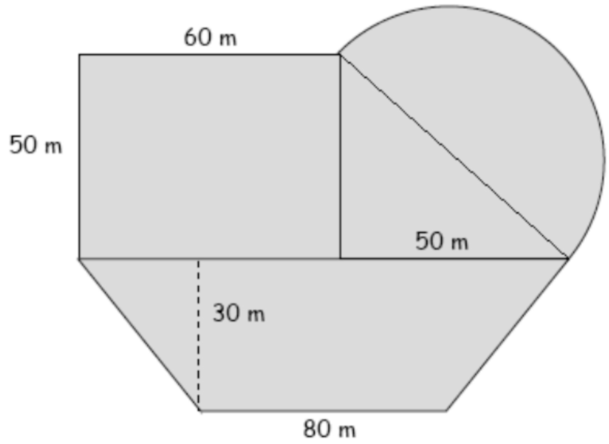
17. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:



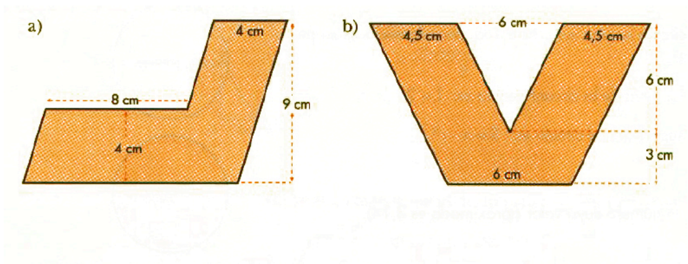
24. Un rollo de tela de 2 m de ancho se ha usado para cortar 1050 pañuelos cuadrados de 20 cm de lado. ¿Qué longitud de tela había en el rollo si no ha faltado ni sobrado tela?

25. Calcula el área de la figura:

26. A Luis le han dejado en herencia un terreno con la extraña forma que se ve en el dibujo. ¿Cuánto obtendrá con su venta a 180 euros/m2?



19. Calcula la superficie de estas figuras descomponiéndolas en otras más sencillas y sumando las áreas de las distintas partes:



20.- Calcula el área en centímetros cuadrados de un paralelogramo de base 2 dm y altura 3 cm.

21.- Calcula el área de un rombo cuya diagonal mayor mide 10 cm y cuya diagonal menor es la mitad de la mayor.

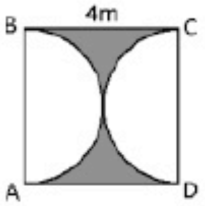
22.- El perímetro de un hexágono regular es 72 cm. Calcula su área.

23.- Si el radio de un círculo es 1 dm, calcula su área en metros cuadrados.

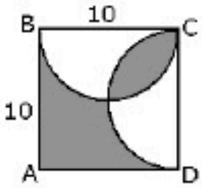
EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN

Hallar el área sombreada en cada caso.

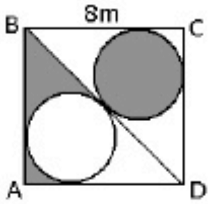
01.- ABCD es un cuadrado. AB y CD son diámetros, hallar el área sombreada



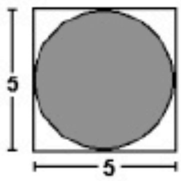
02.- Hallar el área sombreada



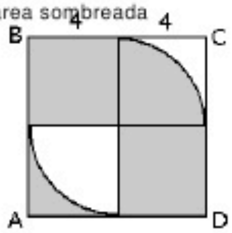
03.- ABCD es un cuadrado, hallar el área sombreada



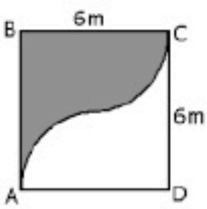
04.- Hallar el área sombreada.



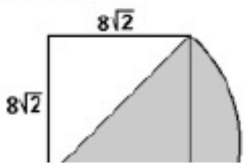
05.- Hallar el área sombreada



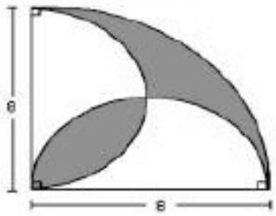
06.- ABCD es un cuadrado, hallar el área sombreada



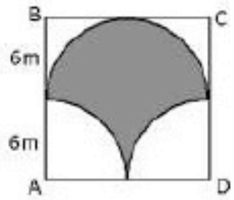
07.- Hallar el área sombreada



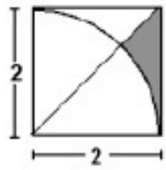
08.- Hallar el área sombreada



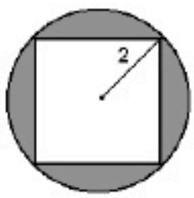
09.- ABCD es un cuadrado, hallar el área sombreada



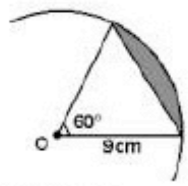
10.- Hallar el área sombreaba, si la figura es un cuadrado



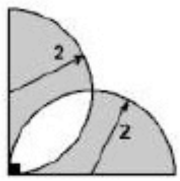
11.- Hallar el área sombreada



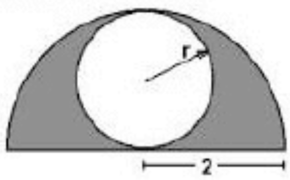
12.- Hallar el área sombreada



13.- Hallar el área sombreada

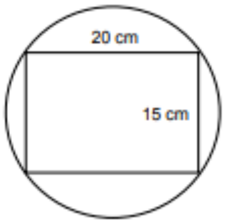


14.- Hallar el área sombreada

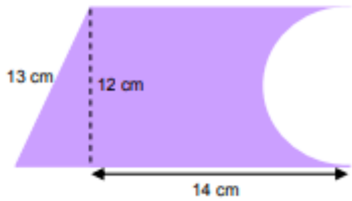


Hallar el área de la corona circular formada por dos circunferencias concéntricas de radios 3 y 5 cm. Dibujar dicha corona. *(Soluc: ≅ 50,27 cm²)*

Hallar el área de la circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 15 y 20 cm (ver figura). *(Soluc: ≅ 490,87 cm²)*



Calcular la superficie de la siguiente pieza:

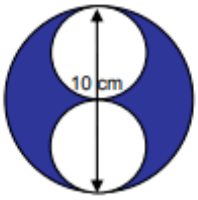


(Soluc: ≅ 141,45 cm²)

Dibujar un sector circular de amplitud 30º asociado a una circunferencia de 12 m de radio. Calcular su área y su perímetro. *(Soluc: ≅ 3,77 m²; ≅ 24,63 m)*

Hallar el área de los siguientes recintos sombreados, sabiendo que la circunferencia exterior mide en todos los casos 10 cm de diámetro:

a)



(Sol: ≅ 39,27 cm²)

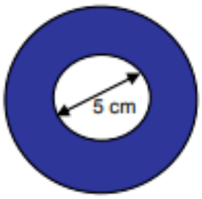
b)

(Sol: ≅ 39,27 cm²)

c)

(Sol: ≅ 13,59 cm²)

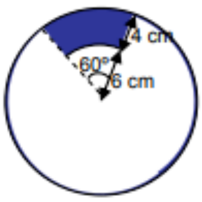
d)



CORONA CIRCULAR

(Sol: ≅ 58,90 cm²)

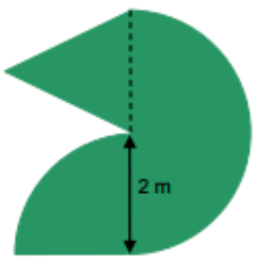
e)



TRAPECIO CIRCULAR

(Sol: ≅ 33,51 cm²)

Calcular la superficie de la siguiente figura:



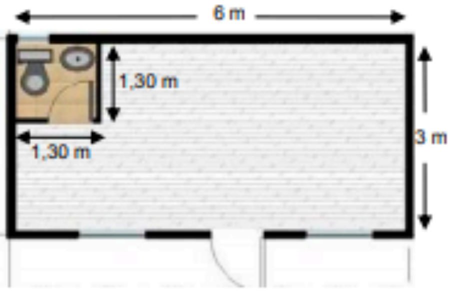
(Sol: ≅ 11,15 m²)

Problemas de planteamiento de áreas:

1. Una torre de 150 m de alto proyecta a cierta hora del día una sombra de 200 m. ¿Qué distancia hay desde el punto más alto de la torre hasta el extremo de la sombra? (Hacer un dibujo explicativo). *(Soluc: 250 m)*

2. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared? (Hacer un dibujo explicativo). *(Soluc: 8 m)*

3. En los lados de un campo en forma de cuadrado se han plantado 16 árboles, separados 5 m entre sí. ¿Cuál es el área del terreno? *(Soluc: 400 m^2)*



4. Se desea enmoquetar el suelo de una oficina, cuya planta es la de la figura adjunta. Si la moqueta cuesta 20 €/m^2, ¿cuánto costará en total? *(Soluc: 72.600 €)*

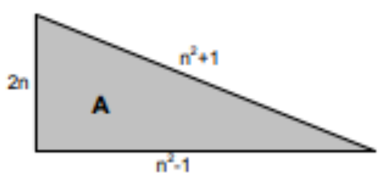
5. En una pista circular de 30 m de diámetro se quieren echar 30 kg de arena por m^2 ¿Cuántas toneladas de arena se necesitarán? *(Soluc: ≅ 21,21 t)*

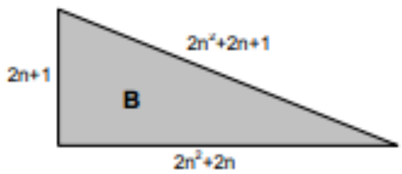
6. Calcular, a la vista de la figura adjunta, el área que puede grabarse de un disco compacto. ¿Qué porcentaje del área total del disco se aprovecha para grabar? *(Soluc: ≅ 100,53 cm^2; ≅ 90,11%)*

7. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que son tres números consecutivos. *(Sol: 3, 4 y 5)*

8. Si el lado de un cuadrado aumenta 2 cm, su área aumenta 28 cm^2 ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado menor? *(Soluc: Se trata de un cuadrado de lado 6 cm)*

9. Los griegos conocían las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, sin más que dar valores a $n \in \mathbb{N}$. Comprobar la veracidad de dichas fórmulas generando algunos casos concretos.

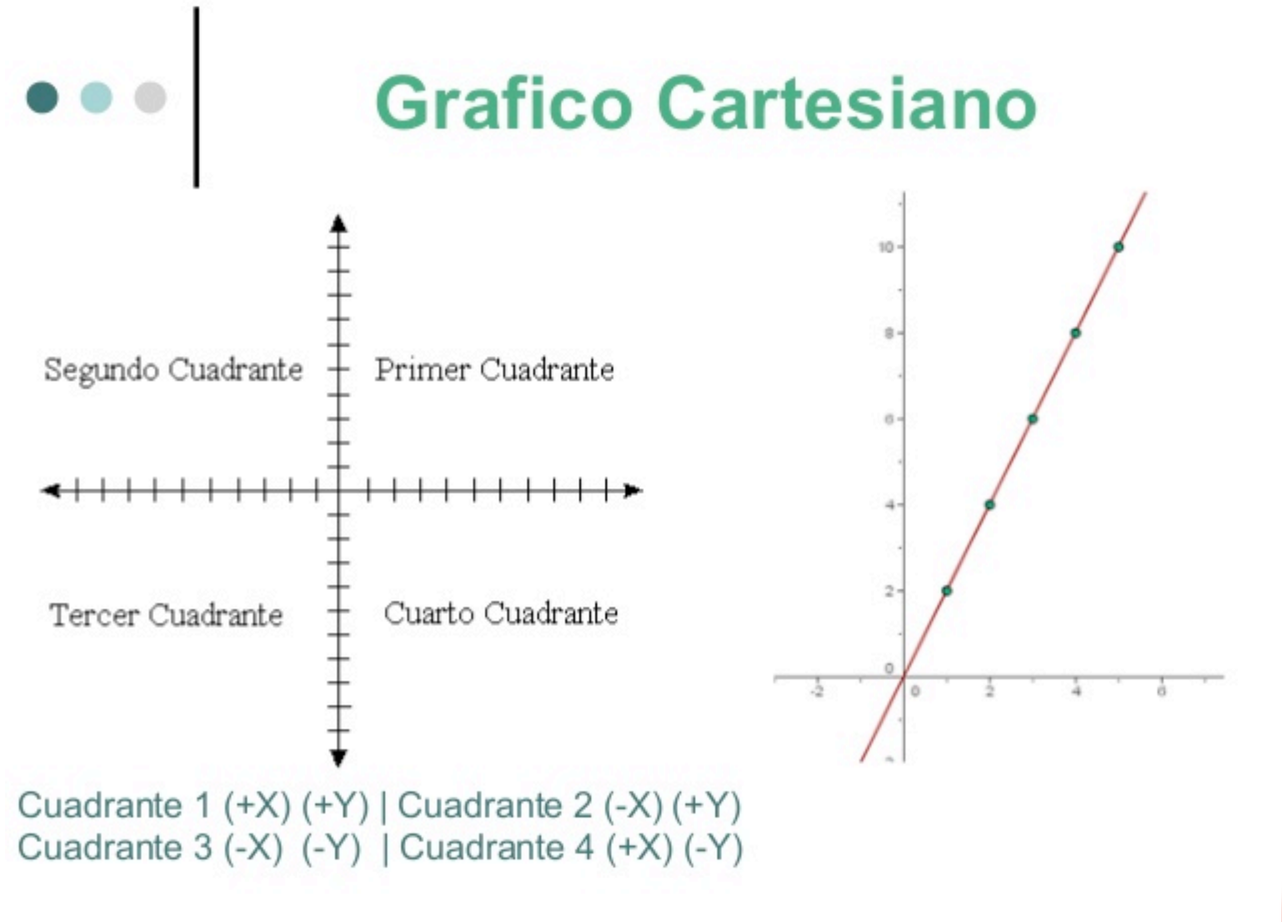




TEMA 7: FUNCIONES

La **función**, que **se** suele denotar por y = f(x), asocia a cada valor de x un único valor de y. Recuerda que los valores de la variable x **se representan** en el eje horizontal (de abscisas) y que los valores de la variable y se representan en el eje vertical (de ordenadas)

El gráfico es el conjunto de todos los pares ordenados (x, f(x)) de la **función** f, es decir, como un subconjunto del producto cartesiano (x,y). **Se representa** gráficamente mediante una correspondencia entre los elementos del conjunto dominio y los del conjunto imagen.



TEMA 7: PROBLEMAS DE FUNCIONES

1.- Reprenta gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 3x$

b) $y = 2x + 1$

c) $y = 5x$

d) $y = 6x – 3$

e) $y = x + 2$

f) $y = x – 10$

g) $y = -x + 1$

h) $y = - 2x +3$

i) $y = - 3x - 2$

j) $y = x/2$

k) $y = x/3 - 2$

TEMA 8: ESTADÍSTICA

Frecuencia absoluta de un dato estadístico es el número de veces que se repite dicho dato.

Frecuencia relativa de un dato estadístico es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.

La suma de las frecuencias absolutas es el número total de datos.

La suma de las frecuencias relativas es siempre igual a uno.

El conjunto de todos estos datos forman la **tabla estadística.**

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En un **diagrama de barras:**

. Los datos se representan en la base de cada barra.

. La altura de las barras representa las frecuencias absolutas.

En un **diagrama de sectores:**

. Los datos se representan en cada sector del círculo.

. El ángulo de cada sector circular es proporcional a la frecuencia absoluta de cada dato.

Polígono de frecuencias:

. Se representa en un sistema de coordenadas

. En el eje de abcisas se representan siempre los valores de la variable estadística.

. En el eje de ordenadas las frecuencias absolutas o relativas.

Para hallar el polígono de frecuencias basta unir en el diagrama los extremos superiores de las relaciones y así se obtiene una línea poligonal llamada **polígono de frecuencias.**

Histograma:

Los valores de la variable estadística se agrupan en intervalos.

. Sobre el eje de abcisas se representan los intervalos.

. Sobre el eje de ordenadas se representan las frecuencias absolutas o las frecuencias relativas.

. Sobre cada intervalo se levanta un rectángulo de altura igual o proporcional a su frecuencia.

VALORES CENTRALES:

- ✓ **Media aritmética simple:**

La **media aritmética** de un conjunto de datos es el cociente entre la suma de todos los datos y el número de éstos.

Para calcular la media:

- . Se multiplican los datos por sus frecuencias respectivas.
- . El resultado se divide por el total de datos.

- ✓ **La moda:**

La **moda** de un conjunto de datos es el dato que tiene mayor frecuencia.

- ✓ **La mediana:**

Mediana de un conjunto de datos es un valor tal que el número de datos menores que él es igual al número de datos mayores que él.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN:

Para resumir, completar y obtener una visión global de un estudio estadístico, además de los valores centrales, es preciso determinar unas medidas de dispersión que indiquen la concentración de la población en torno a dichos valores.

Medidas de dispersión: recorrido y desviación media.

Recorrido:

El recorrido de una variable estadística es la diferencia entre sus valores máximo y mínimo.

El recorrido es una medida de dispersión que sólo tiene en cuenta los valores extremos de la variable estadística.

Desviación media:

La desviación media es una medida de dispersión que además de los valores extremos tiene también en cuenta los valores centrales de la variable estadística.

Para hallar la desviación media de una serie de datos de una variable estadística, procedemos de la siguiente forma:

a) Se calcula el valor medio o media aritmética de los valores de los datos.

b) Se calcula la diferencia entre cada uno de los valores de los datos y la media.

c) Sumamos los valores absolutos de estas diferencias.

TEMA 8 : PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA

1. En una clase de 30 alumnos la profesora de Matemáticas ha leído las notas obtenidas durante la primera evaluación:

3	2	1	7	1	9	5	3	4	5
6	7	8	4	5	6	8	7	6	5
4	5	3	3	9	5	8	3	6	7

Construye la tabla frecuencias. Calcula la media, la moda y la mediana. Realiza el diagrama de barras y diagrama de sectores.

2. Las estaturas de veinte chicos en centímetros son:

135 140 150 140 145 135 150 145 150 145 135 140 150 145 135 140 150 140 145 140

a) Realiza el recuento y escríbelo en una tabla estadística.

b) Representa la situación mediante un diagrama de barras y uno de sectores.

c) Halla la media aritmética simple

3. Las edades de unos alumnos que intervienen en competiciones deportivas son:

12	14	15	16	14	13	12	14	15	13	12	12
14	13	14	12	13	15	16	12	14	14	13	16
14	12	13	14	14	15	15	12	14	14	16	12

a) Efectúa el recuento de datos, forma la tabla de frecuencias

b) Representa gráficamente los datos mediante un diagrama de barras y uno de sectores.

c) Halla la media aritmética y la moda

4. Se ha lanzado un dado 18 veces obteniendo los siguientes resultados:

1 4 5 5 6 2 3 5 2 3 3 5 6 3 2 1 5 4

Forma una tabla de frecuencias, obtén diagrama de barras y de sectores. Calcula la media y la moda.

5. Las edades de los 10 primeros visitantes al Parque de Atracciones en un determinado día han sido las siguientes: **12 10 14 12 14 10 11 12 12 12**

a) Realiza un recuento y haz una tabla estadística

b) Dibuja un diagrama de barras

c) Dibuja un diagrama de sectores

d) Calcula la mediana y la media aritmética de las edades de los diez primeros visitantes del día

e) ¿Qué edad se repite con mayor frecuencia?¿Cómo se llama esa edad en términos estadísticos?

6. El número de hijos de 18 familias seleccionadas al azar es el siguiente:

1 2 3 0 2 1 1 0 5 2 1 0 2 2 1 4 1 6

a) Efectúa el recuento y forma la tabla estadística

b) Representa mediante dos diagramas esta situación

c) Calcula la media aritmética, la moda y la mediana

7.- Ana y Eva han lanzado un dado varias veces cada una. Elabora la tabla de frecuencias absolutas y relativas de cada una. ¿Quién ha sacado más veces el número 3?.

8.- Se ha lanzado un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y se han obtenido los siguientes resultados: 1, 3, 4, 3, 5, 3, 2, 6, 4, 2, 2, 1, 5, 1, 6, 3, 3, 4, 1,5.

Efectúa el recuento y forma la tabla estadística de las frecuencias absolutas y relativas.

9.- Se ha hecho una encuesta sobre el género literario preferido por los alumnos de una clase, y se ha obtenido la siguiente tabla:

Tipo	Nº de alumnos
Novela	22
Poesía	8
Teatro	6

Confecciona la tabla estadística de las frecuencias absolutas y relativas y haz el diagrama de barras.

10.- La tabla indica la edad, en años, de los socios de un club:

Edad	15	16	17	18	19
Frecuencia absoluta	5	8	2	20	5

Representa el diagrama de barras y calcula la media

11.- Las notas de los 25 alumnos de una clase en cierta asignatura son:

6, 3, 4, 8, 5, 9, 2, 6, 5, 4, 6, 7, 5, 8, 6, 5, 3, 4, 1,5, 5, 9, 7, 5, 6

a) Efectúa el recuento y forma la tabla estadística de las frecuencias absolutas y relativas.

b) Representa los datos en un diagrama de barras.

c) Calcula la media, la moda y la mediana

12.- Se ha hecho una encuesta sobre el deporte preferido por los alumnos de una clase:

Deporte	Nº de alumnos
Fútbol	20
Baloncesto	12
Balonmano	8
Natación	4
Esquí	6

a) a) Forma la tabla estadística de las frecuencias absolutas y relativas.

b) b) Representa los datos en un diagrama de barras y de sectores.

EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN

1. En una clase de 30 alumnos la profesora de Matemáticas ha leído las notas obtenidas durante la primera evaluación:

3	2	1	7	1	9	5	3	4	5
6	7	8	4	5	6	8	7	6	5
4	5	3	3	9	5	8	3	6	7

Construye la tabla frecuencias. Calcula la media, la moda y la mediana. Realiza el diagrama de barras y diagrama de sectores.

2. Las estaturas de veinte chicos en centímetros son:

135 140 150 140 145 135 150 145 150 145 135 140 150 145 135 140 150 140 145 140 Realiza el recuento y escríbelo en una tabla estadística. Representa la situación mediante un diagrama de barras y uno de sectores. Halla la media aritmética simple

3. Las edades de unos alumnos que intervienen en competiciones deportivas son:

12	14	15	16	14	13	12	14	15	13	12	12
14	13	14	12	13	15	16	12	14	14	13	16
14	12	13	14	14	15	15	12	14	14	16	12

a) Efectúa el recuento de datos, forma la tabla de frecuencias

b) Representa gráficamente los datos mediante un diagrama de barras y uno de sectores.

c) Halla la media aritmética y la moda

4. Se ha lanzado un dado 18 veces obteniendo los siguientes resultados:

1 4 5 5 6 2 3 5 2 3 3 5 6 3 2 1 5 4

Forma una tabla de frecuencias, obtén diagrama de barras y de sectores. Calcula la media y la moda.

5. Las edades de los 10 primeros visitantes al Parque de Atracciones en un determinado día han sido las siguientes: **12 10 14 12 14 10 11 12 12 12**

a) Realiza un recuento y haz una tabla estadística

b) Dibuja un diagrama de barras

c) Dibuja un diagrama de sectores

d) Calcula la mediana y la media aritmética de las edades de los diez primeros visitantes del día

e) ¿Qué edad se repite con mayor frecuencia?¿Cómo se llama esa edad en términos estadísticos?

6. El número de hijos de 18 familias seleccionadas al azar es el siguiente:

1 2 3 0 2 1 1 0 5 2 1 0 2 2 1 4 1 6

a) Efectúa el recuento y forma la tabla estadística

b) Representa mediante dos diagramas esta situación

c) Calcula la media aritmética, la moda y la mediana

7. En un campamento de verano se han gastado 10.000 €. El gráfico muestra la distribución del gasto:

1. Comida: 40 %
2. Limpieza y mantenimiento: 30 %
3. Actividades: 25 %
4. Vestuario: ....

a) ¿Qué porcentaje se gastó en vestuario?

b) ¿Cuántos euros se gastaron en comida?

c) ¿Cuánto mide el ángulo del sector correspondiente a actividades?