

---

# Teoría y ejercicios de Matemáticas

---

Departamento de Matemáticas  
Curso 2.º E.S.O  
Colegio Romareda. Zaragoza.

---



agustinos  
recoletos

COLEGIO ROMAREDA · ZARAGOZA

## ÍNDICE TEORÍA

- **TEMA 1** (Página 5): Números reales.
- **TEMA 2** (Página 15): Números Radicales.
- **TEMA 3** (Página 18): Expresiones Algebraicas.
- **TEMA 4** (Página 28): Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones.
- **TEMA 5** (Página 38): Áreas y Volúmenes de cuerpos geométricos
- **TEMA 6** (Página 45): Probabilidad.



## ÍNDICE PROBLEMAS

- **TEMA 1** (Página 49): Números reales.
- **TEMA 2** (Página 56): Números Radicales.
- **TEMA 3** (Página 61): Expresiones Algebraicas.
- **TEMA 4** (Página 68): Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones.
- **TEMA 5** (Página 88): Áreas y Volúmenes de cuerpos geométricos
- **TEMA 6** (Página 92): Probabilidad.



# TEORÍA



## TEMA 1: NÚMEROS REALES

### 1.- CONJUNTOS NUMÉRICOS

**Números naturales:** Se representan con la letra N.

Son aquellos que permiten contar los elementos de un conjunto

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

**Números enteros:** Se representan con la letra Z.

Son los naturales, los naturales con signo menos y el cero.

$$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$N \subset Z$  se lee :N contenido en Z, es decir todo número natural es entero.

**Números racionales:** Se representa con la letra Q.

Son todos los que se pueden expresar en forma de razón o fracción: los enteros (fracciones con denominador uno), decimales exactos y decimales periódicos.

$Z \subset Q$  se lee Z contenido en Q, es decir todo número entero, y por eso también todo número natural, es racional.

**Números irracionales:** Se representan con la letra I.

Son los que no se pueden expresar como razón: decimales infinitos y no periódicos, las raíces no exactas y los números  $\pi$ , e.

Por su propia definición un número racional no es irracional y análogamente un número irracional no puede ser racional.

**Números reales:** Se representan con la letra R.

Los números racionales y los irracionales forman los números reales  $R: Q \cup I = R$

Son números reales los naturales, enteros, fraccionarios (decimales exactos y periódicos) e irracionales (decimales infinitos y no periódicos).

No son reales las fracciones con denominador cero y las raíces de índice par y radicando negativo.

Todos los números reales se pueden representar en una recta.



Las operaciones sencillas con números naturales y enteros se trabajaron a lo largo del curso pasado, por lo que los contenidos teóricos asociados a esos conceptos no aparecen de nuevo en este cuaderno de apuntes.

En este curso vamos a comprender el concepto de número racional y las operaciones básicas a realizar con estos números.

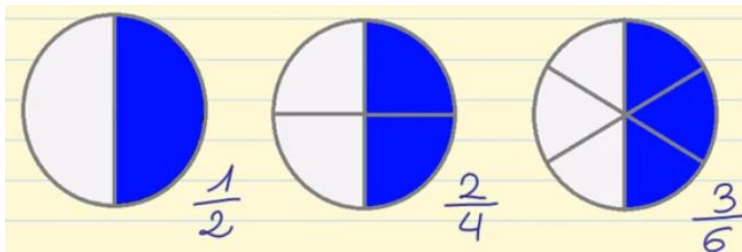
## 2.- NUMEROS RACIONALES

¿Qué son números racionales? Podemos empezar por decir que, un número racional es una cifra o valor que puede ser expresado como el cociente de dos números enteros o más precisamente, un número entero y un número natural positivo. Es decir que es un número racional, es un número que se escribe mediante una fracción.

Los números racionales son números fraccionarios, sin embargo los números enteros también pueden ser expresados como fracción, por lo tanto también pueden ser tomados como números racionales con el simple hecho de dar un cociente entre el número entero y el número 1 como denominador.

### 2.1.- FRACCIONES EQUIVALENTES.

Fíjate en la siguiente imagen:



La primera figura está dividida en dos partes y hemos coloreado una de ellas. Por lo tanto, su fracción será  $\frac{1}{2}$ .

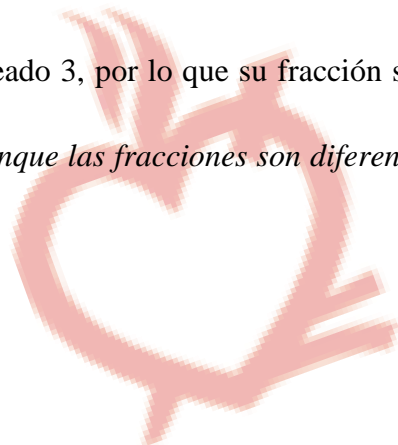
La segunda figura la hemos dividido en 4 partes y hemos coloreado dos. Por lo tanto su fracción será  $\frac{2}{4}$ .

Y la tercera figura la hemos dividido en 6 partes y hemos coloreado 3, por lo que su fracción será  $\frac{3}{6}$ .

*Si te fijas la parte coloreada en todas las figuras es la misma aunque las fracciones son diferentes. Esto es lo que se llama fracciones equivalentes.*

### ¿QUÉ SON LAS FRACCIONES EQUIVALENTES?

Son aquellas fracciones que representan la misma cantidad.



**¿CÓMO SABEMOS SI SON FRACCIONES EQUIVALENTES?**

Dos fracciones son equivalentes si los productos del numerador de una y el denominador de la otra son iguales, es decir, **productos cruzados**.

Vamos a ver unos ejemplos:

Comprobemos si  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{4}{10}$  son fracciones equivalentes.

$$\frac{2}{5} \times \frac{4}{10} \quad 2 \times 10 = 20 \quad 5 \times 4 = 20 \quad \checkmark$$

Para ello multiplicamos el numerador de una de las fracciones por el denominador de la otra.

$$2 \times 10 = 20 \quad 5 \times 4 = 20$$

Como el resultado es el mismo, podemos decir que  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{4}{10}$  son fracciones equivalentes.

Ahora vamos a comprobar si  $\frac{3}{7}$  y  $\frac{7}{3}$  son fracciones equivalentes.

$$\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} \quad 3 \times 3 = 9 \quad 7 \times 7 = 49 \quad \neq$$

Para ello multiplicamos, como muestra la imagen:

$$3 \times 3 = 9 \quad 7 \times 7 = 49$$

Como el resultado no es el mismo, podemos decir que  $\frac{3}{7}$  y  $\frac{7}{3}$  no son fracciones equivalentes.

**¿COMO PODEMOS CALCULAR FRACCIONES EQUIVALENTES?**

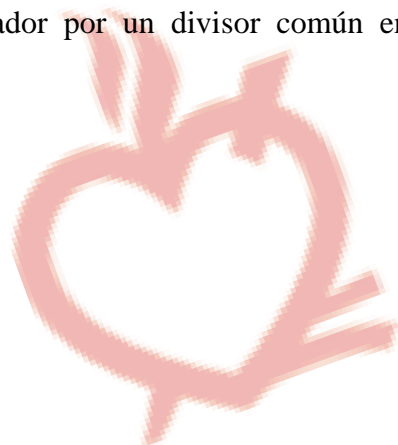
- Por **amplificación**: Multiplicando numerador y denominador por el mismo número.

Por ejemplo, partiendo de la fracción  $\frac{1}{3}$  y multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número, podemos obtener diferentes fracciones equivalentes.

$$\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{6} \times 2 = \frac{4}{12} \times 3 = \frac{12}{36}$$

- Por **simplificación**: Dividiendo numerador y denominador por un divisor común entre ambos.

$$\frac{12}{30} : 2 = \frac{6}{15} : 3 = \frac{2}{5}$$



## 2.2.- TIPOS DE FRACCIONES

Existen tres tipos de fracciones:

<b>Fracciones propias:</b>	El numerador es menor que el denominador
	Ejemplos: $\frac{1}{3}$ , $\frac{3}{4}$ , $\frac{2}{7}$

<b>Fracciones impropias:</b>	El numerador es mayor (o igual) que el denominador
	Ejemplos: $\frac{4}{3}$ , $\frac{11}{4}$ , $\frac{7}{7}$

<b>Fracciones mixtas:</b>	Un número entero y una fracción propia juntos
	Ejemplos: $1\frac{1}{3}$ , $2\frac{1}{4}$ , $16\frac{2}{5}$

Las fracciones propias son menores que la unidad (1) mientras que las impropias son siempre mayores a la unidad.

## 2.3.- COMPARACIÓN DE FRACCIONES

- **Fracciones de igual denominador:**

Entre dos o más fracciones que tienen igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador

- **Fracciones de igual numerador:**

Entre dos o más fracciones que tienen igual numerador es mayor la que tiene menor denominador

- **Fracciones de distinto denominador y numerador:**

Entre dos o más fracciones que tienen distinto numerador y denominador, se deben obtener fracciones equivalentes de igual denominador (reducir todas las fracciones a común denominador (mediante el cálculo del mcm)). Una vez ahí, como dice el primer caso, es mayor la que tiene mayor numerador.



**2.4.- OPERACIONES BÁSICAS CON FRACCIONES**• **SUMA Y RESTA***De fracciones con el mismo denominador:*

Se suman (o restan) los numeradores y se pone el mismo denominador.

Se simplifica la fracción resultante.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{8}{15} - \frac{4}{15} = \frac{8-4}{15} = \frac{4}{15}$$

*De fracciones con distinto denominador*

1ª) Se reducen todas las fracciones a un común denominador. (mcm)

2º) Se suman (o restan) los numeradores y se pone el mismo denominador.

3º) Se simplifica el resultado.

Los números enteros, que no llevan ningún denominador expresado, tienen como denominador 1

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{(18:6) \cdot 5}{18} + \frac{(18:9) \cdot 2}{18} = \frac{15}{18} + \frac{4}{18} = \frac{19}{18}$$

$$\text{m.c.m.}(6 \text{ y } 9) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

$$6 = 2 \cdot 3 \quad 9 = 3^2$$

• **MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES**

Para multiplicar fracciones se multiplican los numeradores y el producto se pone en el numerador, y se multiplican los denominadores y su producto se pone en el denominador. Se simplifica la fracción resultante.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{-2}{7} = \frac{3 \cdot (-2)}{5 \cdot 7} = \frac{-6}{35}$$

**¡¡¡OJO!!! Para multiplicar fracciones NO HACE FALTA REDUCIRLAS A UN COMÚN DENOMINADOR.**

### • DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir fracciones se multiplica el dividendo por el inverso del divisor. O lo que es lo mismo, se multiplican en cruz sus términos; el numerador del dividendo por el denominador del divisor, para obtener el numerador del cociente, y el denominador del dividendo por el denominador del divisor, para el denominador del cociente.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \ln\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{10 : 2}{12 : 2} = \frac{5}{6}$$

*m.c.d.* (10 y 12) = 2    10 = 2 · 5    12 = 2<sup>2</sup> · 3

**!!!OJO!!! Para dividir fracciones NO HACE FALTA REDUCIRLAS A UN COMÚN DENOMINADOR**

### • POTENCIA DE FRACCIONES

Para calcular una potencia de una fracción se eleva el numerador y el denominador al exponente de dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

### • RAÍZ DE FRACCIONES

Para calcular una raíz de una fracción se calcula por separado la raíz del numerador y del denominador.

$$\sqrt[2]{\frac{16}{625}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{625}} = \frac{4}{25}$$

## 2.5.- JERARQUIZACIÓN DE LAS OPERACIONES

**A modo de recordatorio, vamos a repasar el orden de las operaciones:**

Cuando hay que resolver varias operaciones combinadas, se debe seguir este orden:

- Primero hay que resolver las operaciones que van entre paréntesis y entre corchetes, repitiendo las que no se hacen en el mismo orden en que aparecen.
- Se pueden quitar los paréntesis, primero, y los corchetes, después, antes de operar, teniendo en cuenta el signo que llevan delante (si no hay signo o es el signo de sumar, +, se suprimen los paréntesis ó corchetes sin cambiar nada de lo que había dentro; si es el signo de restar, se suprimen, cambiando el signo a todo lo que iba dentro de los paréntesis o corchetes). Si antes o después de los

paréntesis o corchetes van los signos de multiplicar o de dividir, no se deben quitar los paréntesis o corchetes antes de operar. Se podría hacer aplicando la propiedad distributiva pero no es conveniente.

- Las operaciones multiplicativas (multiplicación y división) se hacen antes que las aditivas (suma y resta), a no ser que los paréntesis o corchetes indiquen lo contrario, repitiendo siempre en el mismo orden en que aparecen las operaciones que no corresponde hacer en este paso.

- Entre multiplicaciones y divisiones o entre sumas y restas no hay preferencia y se resolverán en el mismo orden en que aparecen.

### 3.- NÚMEROS DECIMALES

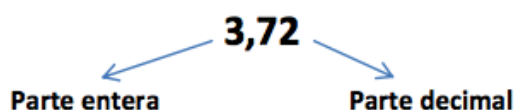
Como ya se ha comentado anteriormente, gran parte de los números decimales son números reales o racionales, aunque no todos. Este año vamos a trabajar con los números decimales que forman parte de los números racionales.

#### 3.1.- CONCEPTO

Al efectuar el cociente que representa una fracción, a menudo obtenemos un número decimal

$$\frac{93}{25} = 3,72$$

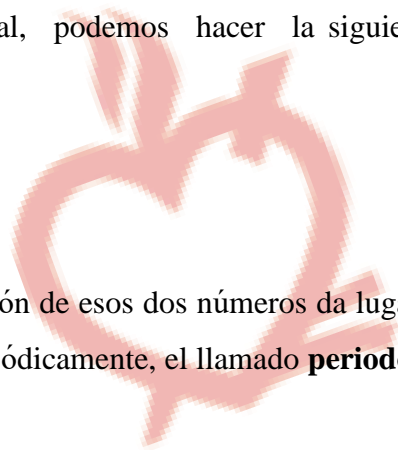
Los números decimales constan de dos partes separadas por una coma:



En función de las cifras que contenga la parte decimal, podemos hacer la siguiente clasificación:

#### 3.2.- CLASIFICACIÓN

Una fracción es un cociente entre dos números enteros. La división de esos dos números da lugar a una **expresión decimal** con un grupo de cifras que se repiten periódicamente, el llamado **periodo**, y que puede ser:



- Decimal **periódico puro**: Todos sus decimales son periódicos

$$12/11 = 1,090909... =$$

- Decimal **periódico mixto**: Sólo algunos de sus decimales son periódicos

$$31/15 = 2,06666... =$$

- Decimal **exacto**: No posee decimales periódicos y la división es exacta.

$$1/8 = 0,125000... = 0,125$$

### 3.3.- ORDENACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Para **comparar y ordenar** los números decimales se deben seguir los siguientes pasos que se van a mostrar a continuación mediante un ejemplo:

PROCEDIMIENTO	EJEMPLO
En primer lugar, nos fijamos en la parte entera.	15,82 y 14,25 → 15 > 14 por tanto 15,82 > 14,25
Si tienen la misma parte entera, nos fijamos en la cifra de las décimas.	15,76 y 15,82 → 8 > 7 por tanto 15,76 < 15,82
Si la cifra de las décimas es igual, nos fijamos en la cifra de las centésimas.	15,86 y 15,82 → 6 > 2 por tanto 15,86 > 15,82
Si la cifra de las centésimas es igual, nos fijaríamos en la cifra de las milésimas y así sucesivamente hasta encontrar dos cifras diferentes que nos permita decidir cuál es el número mayor	

Para **representar** un número decimal en la recta es recomendable obtener su fracción equivalente y realizar el proceso que se vio el curso pasado.

### 3.4.- COMO CONVERTIR UN NÚMERO DECIMAL EN UNA FRACCIÓN GENERATRIZ

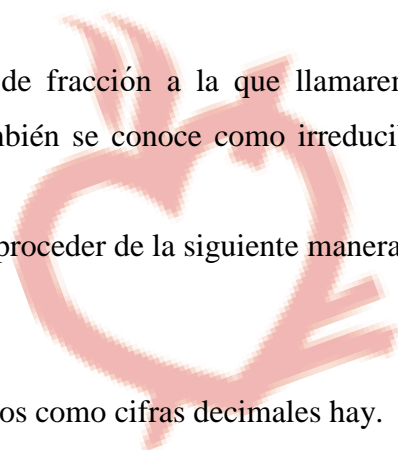
Todo decimal exacto o periódico puede expresarse en forma de fracción a la que llamaremos **fracción generatriz** del decimal en cuestión. Esta fracción también se conoce como irreducible, pues es imposible simplificarla más

Para obtener esta fracción a partir de un número decimal se debe proceder de la siguiente manera:

#### Decimal exacto

Se divide el número sin coma, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay.

#### Decimal periódico puro



En el numerador se escribe la diferencia entre la parte entera seguida del periodo y la parte entera, en el denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo.

### Decimal periódico mixto

En el numerador se escribe la parte entera seguida de las cifras hasta acabar el primer periodo menos la parte entera seguida de las cifras hasta comenzar el periodo, en el denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo seguidos de tantos ceros como cifras hay entre la coma y el comienzo del periodo.

En todos los casos se debe simplificar la fracción obtenida todo lo posible para obtener la fracción generatriz.

### Ejemplo:

DECIMAL EXACTO	DECIMAL PERIÓDICO
$0,1 = \frac{1}{10}$	
$0,25 = \frac{25}{100}$	
$1,24 = \frac{124}{100}$	
$0,051 = \frac{51}{1000}$	
$1,099 = \frac{1099}{1000}$	$2,34 = \frac{234 - 23}{90} = \frac{221}{90}$ <p>Ponemos un 9 por cada decimal PERIÓDICO</p> <p>Ponemos un 0 por cada decimal NO PERIÓDICO</p>

**4.- POTENCIAS**

Propiedad	Expresión generalizada
Producto de dos potencias de igual base	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
Cociente de dos potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Potencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{n \times m}$
Potencia de una multiplicación de potencias	$(a^n \times b^m)^p = a^{n \times p} \times b^{m \times p}$
Número elevado a la primera potencia	$a^1 = a$
Número elevado a la potencia cero	$a^0 = 1$
Potencia con exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$



## TEMA 2: NÚMEROS RADICALES

### 1.- DEFINICIÓN DE RAÍZ n-esima DE UN NÚMERO REAL

Llamamos raíz n-ésima de un número real a, a otro número real b que, elevado a la potencia n, nos da como resultado el radicando:  $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Ejemplos :  $\sqrt[5]{32} = 2$  pues  $2^5 = 32$       o       $\sqrt[4]{81} = \pm 3$  pues  $(\pm 3)^4 = 81$

### 2.- ELEMENTOS DE UN RADICAL

En la siguiente raíz los elementos que la componen reciben el nombre de:

$$c \sqrt[n]{a^m} = b \left\{ \begin{array}{l} \text{La letra b es la raíz} \\ \text{La letra n es el índice} \\ \text{La letra m es el exponente del radicando} \\ \text{El signo } \sqrt{\quad} \text{ se llama signo radical} \\ \text{La letra c es el coeficiente} \\ \text{La expresión } a^m \text{ es el radicando} \end{array} \right.$$

Todas las operaciones en las que aparece el signo radical se llaman operaciones con radicales o simplemente radicales

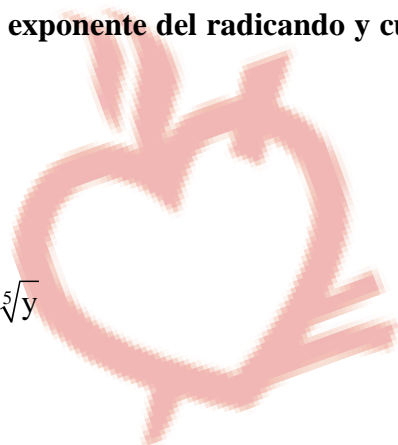
Un radical es igual a una potencia de exponente fraccionario que tiene de base la base del radicando y de exponente una fracción cuyo numerador es el exponente del radicando y cuyo denominador es el índice del radical, es decir:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos:  $\sqrt[5]{2x^3} = (2x^3)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}}x^{\frac{3}{5}}$       o       $2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{x^3}\sqrt[3]{y}$

Los radicales son **homogéneos** si tienen el mismo índice.

Ej:  $\sqrt[5]{x}$ ,  $\sqrt[5]{yz}$ ,  $\sqrt[5]{2x}$



Los radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ej:  $\sqrt[3]{x}$ ,  $-5\sqrt[3]{x}$ ,  $3\sqrt[3]{x}$

### 3.- PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES:

El valor de un radical no cambia si se multiplican o se dividen el exponente del radicando y el índice del radical por un mismo número, es decir:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Esta propiedad nos permite transformar radicales en otros equivalentes y se utiliza para:

a) **Simplificar radicales.**

Si dividimos el exponente de radicando y el índice del radical por el mismo número.

Ejemplo :  $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

b) **Reducir radicales a índice común.**

Se verá en cursos posteriores

### 4.- EXTRACCIÓN E INTRODUCCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL.

a) Para **introducir un factor** dentro de un radical, basta elevar ese factor a un exponente igual al índice del radical.

Ejemplo :  $4x^2\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{4^3 x^6 y}$

b) Para **extraer factores** de un radical realizamos la división del exponente entre el índice. El cociente es el exponente del factor que extraemos de la raíz y el resto es el exponente del factor que se queda en el radicando. Sólo se pueden extraer los factores que tienen un exponente mayor o igual que el índice.

Ejemplo :  $\sqrt[3]{2^7 x^3 y^2} = 2^2 x \sqrt[3]{2y^2}$

**5.- OPERACIONES CON RADICALES.**

a) **Para sumar radicales** tienen que ser semejantes.

- Para sumar radicales semejantes se suman los coeficientes de los sumandos y se deja el mismo radical.

- En el caso de que los radicales no sean semejantes, hay que intentar transformarlos en otros equivalentes que sí lo sean (reduciendo a índice común-propiedad fundamental de los radicales-, racionalizando o sacando factores) En el caso que no se pueda, la operación se deja indicada.

$$\text{Ejemplo : } a\sqrt{bc} + a^2\sqrt{bc} - 2a\sqrt{bc} = (a + a^2 - 2a)\sqrt{bc} = (a^2 - a)\sqrt{bc}$$

b) **Para multiplicar radicales** tienen que ser homogéneos.

- Para multiplicar radicales homogéneos se multiplican los radicandos y los coeficientes dejando el mismo índice.

- Si los radicales no son homogéneos los transformamos reduciendo a índice común.

$$\text{Ejemplo : } \sqrt[3]{2x} \cdot \sqrt{3y} = \sqrt[6]{2^2 x^2} \cdot \sqrt[6]{3^3 y^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3 x^2 y^3}$$

c) **Para dividir radicales** tienen que ser homogéneos.

- Para dividir radicales homogéneos se dividen los radicandos y los coeficientes dejando el mismo índice.

- Si los radicales no son homogéneos los transformamos reduciendo a índice común.

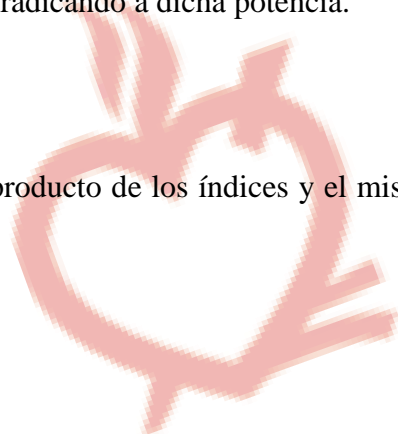
$$\text{Ejemplo: } \sqrt{12x^3y} : \sqrt{3xy^5} = \frac{\sqrt{12x^3y}}{\sqrt{3xy^5}} = \sqrt{\frac{12x^3y}{3xy^5}} = \sqrt{\frac{4x^2}{y^4}} = \frac{2x}{y^2}$$

d) **Para elevar un radical a una potencia** elevaremos su radicando a dicha potencia.

$$\text{Ejemplo : } (\sqrt[3]{x^2})^4 = \sqrt[3]{x^8}$$

e) **Raíz de una raíz** es una raíz que tiene por índice el producto de los índices y el mismo radicando.

$$\text{Ejemplo : } \sqrt[5]{\sqrt[3]{xyz}} = \sqrt[15]{xyz}$$



## TEMA 3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan variables o incógnitas.

Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.

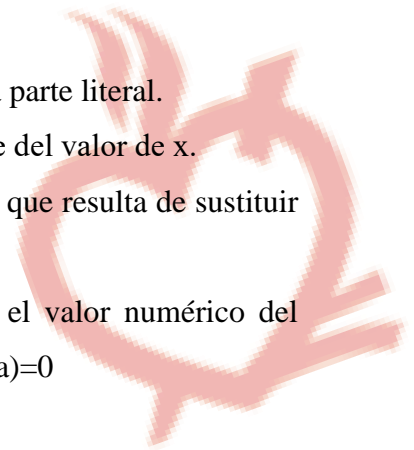
### 1.- CONCEPTOS BÁSICOS:

Cada conjunto de letras o números y letras se llama **término**.

Ejemplo:  $a^3b^2c$ ,  $2xy^3$ ,  $10x^3$

Un Término consta de dos partes: **coeficiente** y **parte literal**.

- ✓ **Coeficiente:** Es el número que va delante de las letras (si no lleva ninguna cifra, recuerda que lleva el 1).
- ✓ **Parte Literal:** Es la compuesta por letras con sus exponentes, si los tienen (si no lleva ningún número en el exponente, recuerda que lleva el 1)
- ✓ **Monomio:** Se llama monomio a la expresión algebraica que tiene un solo término.
- ✓ **Grado de un monomio:** Es la suma de los exponentes de la parte literal.
- ✓ **Polinomio:** Se llama polinomio a la expresión algebraica que tiene dos o más términos.
- ✓ **Grado de un polinomio:** Es el grado del monomio de mayor grado que forma el polinomio.
- ✓ **Monomios semejantes:** Son aquellos que tienen la misma parte literal.
- ✓  **$P(x)$ :** se lee “P de x” y significa que el polinomio depende del valor de x.
- ✓ **Valor numérico de un polinomio** cuando  $x=a$  es el valor que resulta de sustituir la x por a y operar:  $P(a)$
- ✓ **Raíz de un polinomio:** es el valor de x que hace que el valor numérico del polinomio sea 0, es decir, es el valor  $x=a$  que hace que  $P(a)=0$



## 2.- MONOMIOS:

### 2.1.- OPERACIONES CON MONOMIOS:

- **SUMA DE MONOMIOS**

Sólo podemos sumar monomios semejantes.

La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

$$ax + bx = (a + b)x$$

$$\text{Ejemplo: } 2x^2y^3z + 3x^2y^3z = (2 + 3)x^2y^3z = 5x^2y^3z$$

Si los monomios no son semejantes, al sumarlos, se obtiene un polinomio.

- **PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN MONOMIO**

El producto de un número por un monomio es otro monomio semejante cuyo coeficiente es el producto del coeficiente del monomio por el número.

$$\text{Ejemplo: } 5 \cdot (2x^2y^3z) = 10x^2y^3z$$

- **MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS**

La multiplicación de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base.

$$ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{(n+m)}$$

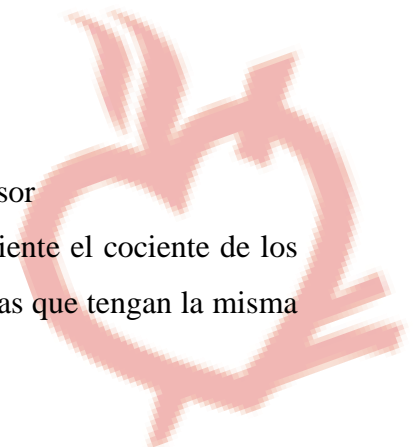
$$\text{Ejemplo: } (5x^2y^3z) \cdot (2y^2z^2) = 10x^2y^5z^3$$

- **DIVISIÓN DE MONOMIOS**

Sólo se pueden dividir monomios cuando:

- 1. Tienen la misma parte literal
- 2. El grado del dividendo es mayor o igual que el del divisor

La división de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tengan la misma base.



### 3.- POLINOMIOS

#### 3.1.- OPERACIONES CON POLINOMIOS:

- **SUMA DE POLINOMIOS**

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$$P(x) = 2x^3 + 5x - 3 \quad Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$$

- Ordenamos los polinomios, si no lo están.

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$$

- Agrupamos los monomios del mismo grado.

$$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$$

- Sumamos los monomios semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$$

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

- **RESTA DE POLINOMIOS**

La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo, es decir, cambiar el signo a todos los términos del sustraendo.

$$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$$

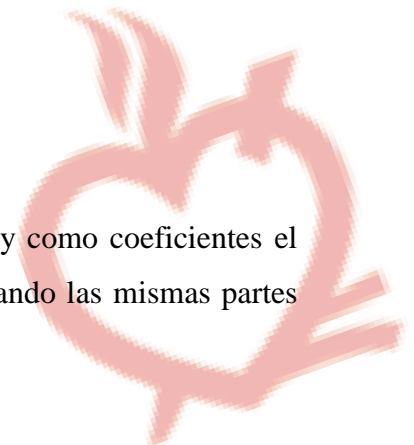
$$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$$

- **MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS**

#### 1. Multiplicación de un número por un polinomio

Es otro polinomio que tiene de grado el mismo del polinomio y como coeficientes el producto de los coeficientes del polinomio por el número y dejando las mismas partes literales.

$$\text{Ejemplo: } 3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$



## 2. Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.

$$\text{Ejemplo: } 3x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$$

## 3. Multiplicación de dos polinomios

- Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio.

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) = 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$$

- Se suman los monomios del mismo grado.

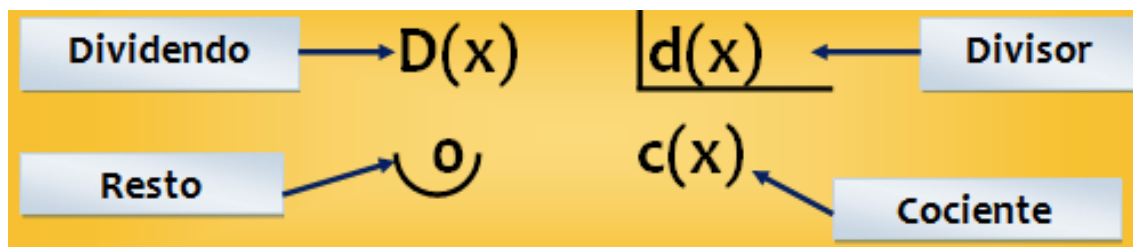
$$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

- Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

$$\text{Grado del polinomio} = \text{Grado de } P(x) + \text{Grado de } Q(x) = 2 + 3 = 5$$

## • DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Consideremos estos dos polinomios, uno como dividendo  $D(x)$ , y otro como divisor  $d(x)$ :



**En una división exacta de polinomios, el resto es igual a cero.**

Dividir el polinomio  $D(x)$  entre el polinomio  $d(x)$  es hallar otro polinomio cociente  $c(x)$  tal que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

En esta caso se dice que la división es exacta y se dice que dividendo  $D(x)$  es múltiplo del divisor  $d(x)$  y del cociente  $c(x)$ . También se dice que  $d(x)$  y  $c(x)$  son divisores del polinomio  $D(x)$ .

$$D(x) = d(x) \cdot c(x)$$

Cuando la división NO es exacta el resto es distinto de cero y se cumple la propiedad fundamental de la división:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$

Para explicar la división entre polinomios, se trabajará a partir del siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 (6x^5 + x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 7x + 1) \quad | \quad (2x^2 + x - 3) \\
 \underline{-6x^5 - 3x^4 + 9x^3} \qquad \qquad \qquad + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\
 -2x^4 + 9x^3 + 4x^2 \\
 \underline{+2x^4 + x^3 - 3x^2} \\
 +10x^3 + x^2 - 7x \\
 \underline{-10x^3 - 5x^2 + 15x} \\
 -4x^2 + 8x + 1 \\
 \underline{+4x^2 + 2x - 6} \\
 +10x - 5
 \end{array}$$

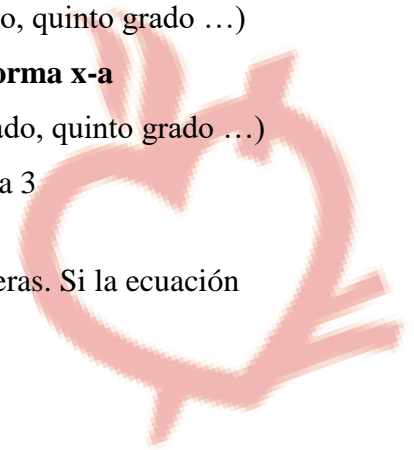
Cuando el Divisor  $d(x)$  es un binomio del tipo  $(x - a)$ , la división se puede realizar mediante el TEOREMA DE RUFFINI.

### 3.2.- TEOREMA DE RUFFINI.

La regla de Ruffini es un método que permite:

- Resolver ecuaciones de tercer grado o mayor (cuarto grado, quinto grado ...)
- **Dividir un polinomio entre un binomio que sea de la forma  $x-a$**
- Factorizar polinomios de tercer grado o mayor (cuarto grado, quinto grado ...)
- Calcular las raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3

Con la regla de Ruffini, solamente se obtienen las soluciones enteras. Si la ecuación tiene soluciones complejas o reales, éste método no es válido.



Vamos a entender la división de polinomios utilizando este teorema mediante un ejemplo práctico:

Tenemos la siguiente división  $\frac{D(x)}{d(x)}$  donde:

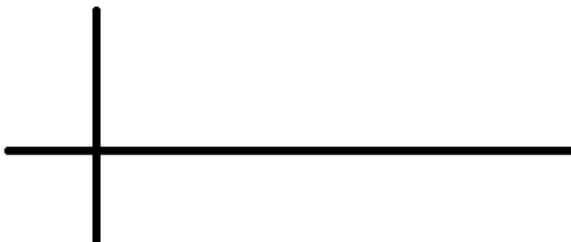
$$D(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$d(x) = x - 1$$

1.- Identificamos los **coeficientes de cada término del dividendo**, que son los números que van delante de la incógnita. Para la ecuación anterior, los represento en verde para identificarlos:

$$1x^3 + 2x^2 - 1x - 2 = 0$$

2.- Trazamos dos líneas perpendiculares de esta forma:



3.- Colocamos los coeficientes **ordenados por su grado de mayor o menor**:

Grado $\Rightarrow$	3	2	1	0
Coeficientes del polinomio $\Rightarrow$	1	+ 2	- 1	- 2

En la **regla de Ruffini**, el grado va disminuyendo de 1 en 1 y cada grado tiene su lugar. Por ejemplo si no tuviéramos ningún término que tenga  $x^2$ , en el lugar del grado 2, se colocaría un 0.

Los números que hemos escrito hasta ahora en el método de Ruffini, es equivalente a escribir la ecuación, es decir:

$$1 \quad + 2 \quad - 1 \quad - 2 \quad \longleftrightarrow \quad 1x^3 + 2x^2 - 1x - 2 = 0$$

4.- Ahora escribimos un número a la izquierda de la línea vertical. Nuestro divisor  $d(x)$  es un binomio del tipo  $(x - a)$  y por tanto, el número a colocar es el 1.

Ese número corresponde al número  $(a)$  del binomio  $x - a$ :

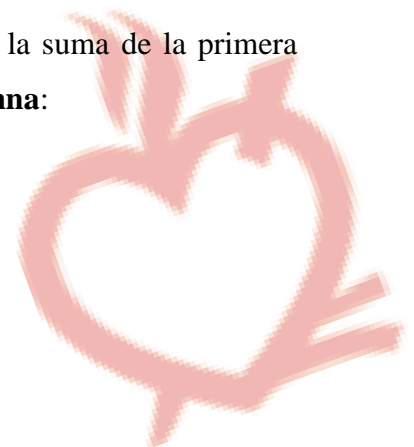
En este caso, escribir ahí un 1, significa el binomio  $(x - 1)$  en el método de Ruffini

$$1 \longleftrightarrow x - 1$$

5.- Empezamos a ejecutar el método. El **primer hueco** de la segunda fila, **siempre se deja libre**:

6.- Se hace la suma de la **primeracolumna** y el resultado se pone abajo:

7.- Se multiplica el número de la izquierda por el resultado de la suma de la primera columna. El resultado se coloca en el hueco de la **segunda columna**:



8 – Se realiza la suma de la **segunda columna**:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +2 & -1 & -2 \\
 1 & & 1 & & \\
 \hline
 & 1 & 3 & & 
 \end{array}
 \Rightarrow \text{Se realiza esta suma}$$

9.- Se multiplica el número de la izquierda por el resultado de la suma de la segunda columna. El resultado se coloca en el hueco de la **tercera columna**:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +2 & -1 & -2 \\
 1 & & 1 & & \\
 \hline
 & 1 & 3 & & 
 \end{array}
 \Rightarrow \text{Se multiplican esos dos números y se coloca el resultado en la tercera columna}$$

10.- Así sucesivamente hasta completar todas las columnas:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +2 & -1 & -2 \\
 1 & & 1 & 3 & 2 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 2 & 0
 \end{array}$$

El número que obtengamos en la **última columna** es el resto de la división  $R(x)$ . En este caso es un 0 por lo que la división es exacta.

En caso se diría que  $x=1$  es una raíz de  $D(x)$  y que  $d(x) = x - 1$  es un factor de dicho polinomio. (FACTORIZACIÓN)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +2 & -1 & -2 \\
 1 & & 1 & 3 & 2 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 2 & 0
 \end{array}$$



Una vez llegado al final, vamos a ver **qué significa** lo que tenemos hasta aquí:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +2 & -1 & -2 \\
 1 & & & & \\
 \hline
 & 1 & 3 & 2 & 0 \\
 \text{Grado} \Rightarrow & 2 & 1 & 0 & 
 \end{array}$$

Lo que nos ha quedado en la última fila es otra ecuación, pero ahora, el número que está a la izquierda del 0, tiene grado 0 y éste va aumentando de 1 en 1 hacia la izquierda. En este caso, nos queda lo **equivalente** a tener esta ecuación:

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad \longleftrightarrow \quad x^2 + 3x + 2$$

que sería el cociente de la división  $C(x)$

En caso de estar factorizando, habríamos obtenido el primer factor, y deberíamos repetir el proceso tantas veces como indique el grado del polinomio a factorizar, buscando siempre que el resto sea cero.

### 3.3.- PRODUCTOS NOTABLES:

Como se vio el curso pasado, estos productos nos permiten factorizar polinomios y realizar operaciones de manera más sencilla, por lo que es muy importante conocerlos y saber aplicarlos.

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$



### 3.4.- EXTRACCIÓN DE FACTORES COMUNES:

Cuando ves que una expresión algebraica de más de un término tienen en común uno o varios factores decimos que podemos sacar el factor o factores comunes:

Para sacar el factor común debes hacer dos cosas:

1ª.- Escribir el factor común.

2ª.- Abrir un paréntesis y escribir dentro de él el cociente de cada término por el valor que está delante del paréntesis.

Ejemplo:  $10x^3 - 15x^2 + 5x = 5x \cdot (2x^2 - 3x + 1)$

### 3.5.- FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO:

Expresar un polinomio como producto de expresiones irreducibles.

Para obtener todos los factores posibles (como máximo el número de factores será igual al grado del polinomio), se deben seguir, en este orden, los siguientes pasos.

✓ **Sacar factor común** (Extraer todos los factores comunes a todos los términos del polinomio, tanto coeficientes como letras)

✓ **Productos notables:**

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

✓ **Teorema de Ruffini** (Realizar el teorema tantas veces como grado tenga el polinomio). Sólo nos permite obtener raíces enteras.



## TEMA 4: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

### 1.- ECUACIONES DE PRIMER GRADO

#### ✓ Definición, elementos y solución de la ecuación de primer grado

Una ecuación de primer grado es una igualdad del tipo

$$ax = b$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales conocidos, con  $a \neq 0$ . Al número desconocido  $x$  se le llama incógnita. A veces, al igual que cuando se trabaja con polinomios, a los números  $a$  y  $b$  se le llaman coeficientes de la ecuación de primer grado. Al número  $b$  también se le llama término independiente. Al sustituir la incógnita  $x$  por su valor se ha de verificar la igualdad. Claramente la incógnita ha de tomar el valor

$$x = \frac{b}{a}$$

ya que

$$ax = a \frac{b}{a} = \frac{ab}{\cancel{a}} = b$$

Observa que la división  $b/a$  se puede llevar a cabo porque hemos supuesto que  $a \neq 0$ . En realidad, para despejar  $x$ , lo que hemos hecho es dividir ambos miembros de la igualdad entre  $a$ :

Esta propiedad se aprende, no con demasiada corrección, con la siguiente frase: “lo que está multiplicando pasa al otro miembro dividiendo”. En este caso, como  $a$  multiplica a  $x$ , pasa al otro miembro dividiendo, con lo que  $x = b/a$

Sin embargo hay que tener cuidado con la técnica anterior, y tener en cuenta que en realidad la propiedad que se aplica es: “si se dividen los dos miembros de una igualdad entre un mismo número distinto de cero, la igualdad no varía”. Esta propiedad de las igualdades es, de hecho, la misma que esta otra: “si se multiplican los dos miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad no varía”

#### ✓ Procedimiento para resolver una ecuación de primer grado

Recordemos que la expresión que se encuentra a la izquierda de la igualdad recibe el nombre de primer miembro de la ecuación y que la expresión que está a la derecha de la igualdad se llama segundo miembro de la ecuación.

Los pasos para resolver una ecuación cualquiera de primer grado son los siguientes:

1. Eliminar los corchetes y paréntesis.

2. Eliminar los denominadores. Para ello se multiplican todos y cada uno de los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. Trasponer términos. Lo que se quiere decir con esto es que debemos presentar los términos en los que aparece la incógnita en uno de los miembros de la igualdad, y los términos que no tienen incógnita en el otro miembro de la igualdad. Para ello aplicamos la siguiente y conocida propiedad de las igualdades:

“Si se suma o se resta la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, la igualdad no varía.” O como se dice coloquialmente: “Lo que está sumando pasa restando y viceversa”

4. Reducir términos semejantes. Una vez realizada la trasposición de términos podremos sumar y restar todos los términos de ambos miembros pues serán todos semejantes. De este modo la ecuación aparecerá ya de la forma  $ax = b$ .
5. Despejar la incógnita. Una vez despejada la incógnita es conveniente simplificarla, caso de que sea posible.
6. Realizar la comprobación, sustituyendo el valor obtenido en la ecuación inicial y verificar que se cumple la igualdad.



## 2.- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

### ✓ Definición y elementos de la ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una igualdad del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales conocidos con  $a \neq 0$ , y reciben el nombre de coeficientes de la ecuación de segundo grado. Al igual que en el caso de las ecuaciones de primer grado, al número desconocido  $x$  se le llama incógnita.

### 2.1.- CASO GENERAL

En este caso los tres coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son todos distintos de cero. Este caso es el más general y la ecuación de segundo grado queda, en su forma reducida, así:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución se obtiene de sustituir los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observa que el símbolo  $\pm$  indica que, para obtener las dos posibles soluciones, hay que sumar por un lado y restar por otro:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



## 2.2.- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

Aunque la fórmula general también funciona en estos casos, a continuación se indica un método de resolución más sencillo.

### ✓ CASO 1: Cuando $b = 0$

En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

Para resolverlas se despeja  $x^2$  y luego se extrae la raíz cuadrada para despejar finalmente la incógnita  $x$ . Hay que tener en cuenta que:

- ✓ Si el radicando es mayor que cero obtendremos dos soluciones, la raíz cuadrada con signo positivo y la raíz cuadrada con signo negativo.
- ✓ Si el radicando es cero la solución es  $x = 0$
- ✓ Si el radicando es negativo la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales.

Nota: el radicando de una raíz es “aquello que se encuentra dentro de la raíz”.

### ✓ CASO 2: Cuando $c = 0$

En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

El proceso de resolución consiste en extraer factor común la incógnita  $x$  pues ésta aparece en ambos términos. Una de las soluciones siempre es  $x = 0$ . La otra solución se obtiene de igualar a cero el otro factor y de resolver la correspondiente ecuación de primer grado. Veámoslo

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

### ✓ Procedimiento para resolver una ecuación de segundo grado

Los pasos para resolver una ecuación de segundo grado son muy similares a los que se seguían para resolver ecuaciones de primer grado:

1. Eliminar los corchetes y paréntesis.
2. Eliminar los denominadores. Para ello se multiplican todos y cada uno de los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. Colocar todos los términos en el primer miembro. De este modo en el segundo miembro aparecerá un cero.
4. Reducir términos semejantes. Una vez realizada la trasposición de términos podremos sumar y restar todos los términos de ambos miembros pues serán todos semejantes. De este modo la ecuación aparecerá ya en su forma reducida más general  $ax^2 + bx + c = 0$ , o bien se presentará en una de sus dos formas incompletas:  $ax^2 + c = 0$  ó  $ax^2 + bx = 0$ .
5. Despejar la incógnita. Para ello procederemos como ya se ha explicado en el caso de que la ecuación de segundo grado sea incompleta. Si la ecuación se presenta en su forma reducida más general se aplicará la fórmula ya conocida para despejar la incógnita:

### 2.3.- PROPIEDADES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Vamos a demostrar algunas propiedades teóricas de las ecuaciones de segundo grado y las aplicaremos para resolver problemas. Las propiedades son las siguientes:

- Suma de las raíces:

Si  $x_1$  y  $x_2$  son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Entonces, su suma,  $S$ , es

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

- Producto de las raíces:

Si  $x_1$  y  $x_2$  son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$



Entonces, su producto,  $P$ , es

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- Demostración:

Puesto que  $x_1$  y  $x_2$  son soluciones de la ecuación de segundo grado, son de la forma

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ahora sumamos ambas expresiones

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Si las multiplicamos,

$$\begin{aligned} P &= x_1 x_2 = \\ &= \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \\ &= \frac{1}{4a^2} (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) = \\ &= \frac{1}{4a^2} ((-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2) = \\ &= \frac{1}{4a^2} (b^2 - b^2 + 4ac) = \\ &= \frac{1}{4a^2} 4ac = \frac{c}{a} \end{aligned}$$



### 3.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

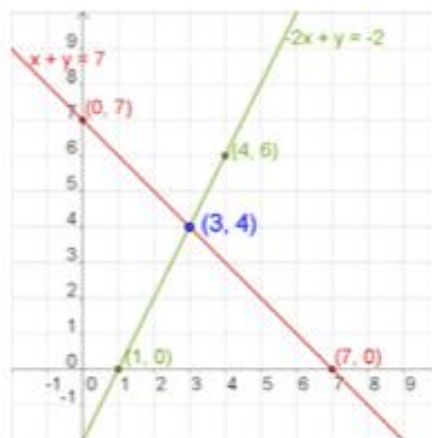
Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** son dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.

Una **solución de un sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas es un par de valores  $(x,y)$  que verifican las dos ecuaciones a la vez. **Resolver el sistema** es encontrar una solución.

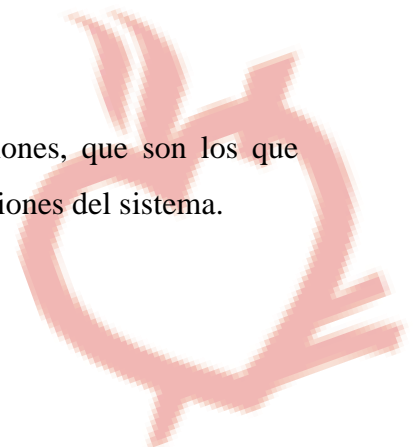
#### NÚMERO DE SOLUCIONES

Un sistema de ecuaciones, según el número de soluciones que tenga, se llama:

- **Sistema Compatible Determinado**, si tiene una única solución. La representación gráfica del sistema son dos rectas que se cortan en un punto. Son los que vamos a trabajar este año principalmente.
- **Sistema Compatible Indeterminado**, si tiene infinitas soluciones. La representación gráfica del sistema son dos rectas coincidentes.
- **Sistema Incompatible**, si no tiene solución. La representación gráfica del sistema son dos rectas que son paralelas.



Existen varios métodos para resolver estos sistemas de ecuaciones, que son los que vamos a tener que aplicar para obtener los valores de  $x$  e  $y$ , soluciones del sistema.



### 3.1.- MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

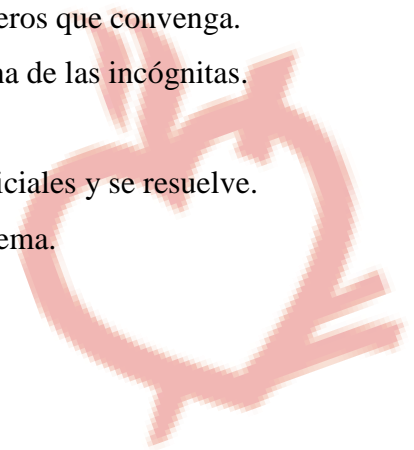
✓ **Método de Sustitución:**

1. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo así una ecuación con una única incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obtenida.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Se resuelve esta ecuación y los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.
6. Comprobar en el sistema inicial

✓ **Método de Igualación:**

1. Se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones obtenidas con lo que obtenemos una ecuación con una sola incógnita
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.
6. Comprobar en el sistema inicial

✓ **Método de Reducción:**

1. Se preparan las ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
  2. Las restamos para que se simplifique y así desaparezca una de las incógnitas.
  3. Se resuelve la ecuación resultante.
  4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
  5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.
  6. Comprobar en el sistema inicial
- 

✓ **Método de Representación gráfica:**

1. Se crea una tabla de valores para cada una de las dos ecuaciones
2. Se representan las rectas en los ejes cartesianos a partir de los puntos obtenidos en la tabla de valores
3. El punto de corte nos da la solución del sistema (es el único punto en común que tienen las dos rectas).
4. Comprobar en el sistema inicial

**3.2.- SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES (AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS)**

Son sistemas donde, al menos, una de las ecuaciones es No Lineal, es decir, no es una recta del tipo  $ax + by = c$ .

**El método más habitual de resolución es el de SUSTITUCIÓN, donde se despeja una de las incógnitas en la ecuación Lineal y se sustituye en la No Lineal.**

**A partir de ahí se resuelve la ecuación (generalmente de 2º grado) y se obtienen los valores de x e y que son solución del sistema.**



#### 4.- RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS

Utilizando el lenguaje algebraico se puede expresar simbólicamente diversas generalizaciones y resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana: En estos casos las letras funcionan como representaciones de relaciones aritmética y de situaciones reales en problemas concretos.

Así es posible representar diferentes enunciados por medio de expresiones algebraicas o interpretarlas para transformarlas en enunciados que representen algún tipo de situación. Expresiones verbales tales como “el doble”, “el triple”, “la mitad”, “la cuarta parte” se pueden expresar en forma algebraica. Por ejemplo

Lenguaje Verbal	Lenguaje algebraico
Un número determinado	$x$
El doble de un numero	$2x$
La mitad de un numero	$x/2$
Las tres cuartas partes de un numero	$3x/4$
El triple de un numero aumentado en cinco	$3x + 5$
La tercera parte de un número disminuido en siete	$x/3 - 7$
La cuarta parte del cuadrado de un numero	$x^2/4$
Tres números consecutivos	$x, x + 1, x + 2$
El cubo de un numero disminuido en sus dos terceras partes	$x^3 - 2x/3$

#### 4.1.- PLANTEAMIENTO Y RESOLUCION DE PROBLEMAS

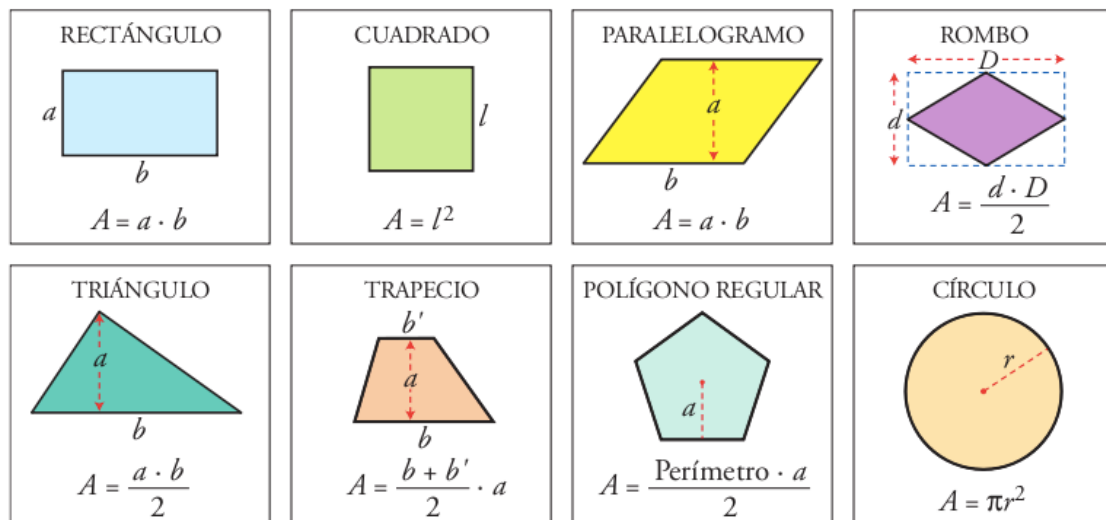
Para solucionar problemas relacionado con el planteamiento de ecuaciones, es conveniente tener en cuenta los siguientes pasos.

1. **Interpretación del enunciado.** Al leer el enunciado se debe identificar la incógnita del problemas, expresando la información necesaria en termino de dicha incógnita
2. **Planteamiento y resolución de la ecuación.** con la información necesaria en término de la incógnita, se plantea la ecuación que relaciona los datos del problema. Luego, se resuelve la ecuación planteada conforme a los criterios, pasos y procedimientos de resolución de ecuación estable cedido anteriormente.
3. **Comprobación de la solución.** Se verifica la solución hallada, comprobando que cumple con las condiciones del enunciado del problema.

## TEMA5: ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS

### GEOMÉTRICOS

En primer lugar, y antes de comenzar a explicar el concepto de cuerpo geométrico, conviene recordar el área de las figuras planas más importantes, que serán de utilidad en adelante:



Un **cuerpo geométrico** es una estructura material en la que pueden apreciarse las tres dimensiones: largo, ancho y alto.

Los sólidos geométricos del espacio – cuerpos geométricos – pueden clasificarse en dos grandes grupos:

•**Poliedros:**

Cuerpos geométricos totalmente limitados por polígonos.

•**Cuerpos de Revolución:**

Cuerpos geométricos engendrados por la rotación de una figura plana alrededor de su eje.



## 5.1.- POLIEDROS

Se llama poliedro a todo cuerpo geométrico que esté totalmente limitado por polígonos.

En todo poliedro se distinguen los siguientes elementos:

- *Caras:* polígonos que limitan el poliedro.
- *Aristas:* lados de las caras del poliedro.
- *Vértices:* vértices de las caras del poliedro.
- *Diagonales:* segmentos que unen dos vértices no pertenecientes a la misma cara.

Los poliedros se denominan según su número de caras:

- tetraedro (cuatro caras),
- pentaedro (cinco),
- hexaedro (seis),
- heptaedro (siete),
- octaedro (ocho),
- decaedro (diez),
- endecaedro (once),
- dodecaedro (doce),
- pentadecaedro (quince)
- icosaedro (veinte).

Los demás poliedros no reciben ningún nombre en particular: poliedro de n caras.

Un poliedro es **regular** cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales entre sí.

### TEOREMA DE EULER

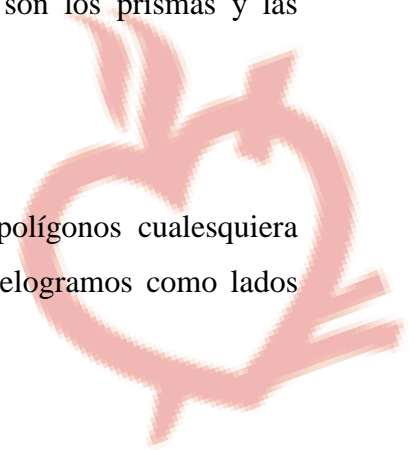
El número de caras de un poliedro más el número de sus vértices es igual al número de sus aristas más dos.

$$C + V = A + 2$$

Dentro de los poliedros existen dos grupos importantes, que son los prismas y las pirámides.

- **PRISMAS**

Se denominan prismas aquellos poliedros limitados por dos polígonos cualesquiera iguales y de lados paralelos llamados bases y por tantos paralelogramos como lados tienen las bases.



Dichos paralelogramos reciben el nombre de caras laterales del prisma. La distancia entre las dos bases se llama altura del prisma.

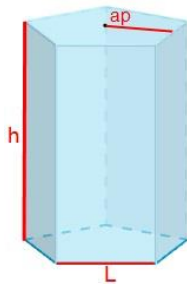
Los lados de las bases constituyen las aristas básicas y los lados de las caras laterales las aristas laterales, (éstas son iguales y paralelas entre sí).

**En este curso únicamente vamos a trabajar con Prismas Rectos, cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases (en este caso las caras laterales son rectángulos).**

**Área lateral del prisma** es la suma de las áreas de las caras laterales del mismo.

Cuando se trata de un prisma recto, es igual al perímetro de la base por la altura del prisma;

El **volumen** en prismas rectos siempre es igual a área de la base por la altura del prisma.



$$\text{Área} = 2(P \cdot a_{pb}/2) + (P \cdot h)$$

$$\text{Volumen} = ((P \cdot a_{pb})/2) \cdot h$$

- **PIRÁMIDES**

Se denominan pirámides aquellos poliedros limitados por un polígono cualquiera llamado base y por tantos triángulos como lados tiene la base que concurren en un punto, llamado **vértice**.

Dichos triángulos reciben el nombre de caras laterales de la pirámide.

Las aristas de la base se llaman aristas básicas y las aristas que concurren en el vértice, aristas laterales. La distancia entre el vértice y la base es la altura de la pirámide.

Este año, igualmente, solamente vamos a ver pirámides regulares, cuando la base es un polígono regular y las caras laterales son triángulos isósceles iguales entre sí.

En toda pirámide regular el pie de la perpendicular desde el vértice a la base, es decir, el pie de la altura, coincide con el centro de la base.

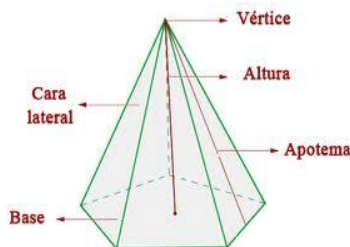
Se llama **apotema** de una pirámide regular a la altura de uno cualquiera de los triángulos laterales.

**El área lateral** de una pirámide es igual a la suma de las áreas de las caras laterales de la misma.

Si la pirámide es regular, su área lateral es igual al semiproducto del perímetro de la base por la apotema de la pirámide.

**El área total** se obtiene sumando el área lateral y el área de la base.

El volumen de una pirámide es igual al área de la base por la altura partido por tres.



$$\overbrace{A_B} \quad \overbrace{A_L}$$

$$\text{Área} = (P \cdot a_{pb} / 2) + (P \cdot a_{pa}) / 2$$

$$\text{Volumen} = (((P \cdot a_{pb}) / 2) \cdot h) / 3$$



## 5.2.- CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Dentro de los cuerpos de revolución, este año vamos a ver el cilindro, el cono y la esfera.

### • CILINDRO

Se llama cilindro de revolución al cuerpo engendrado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados, tomado como eje de rotación.

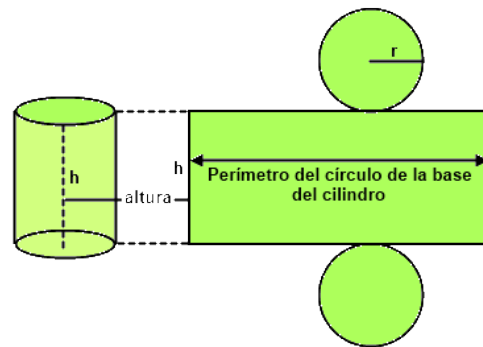
Se produce así un cuerpo limitado por dos círculos iguales denominados bases y una superficie curva llamada superficie cilíndrica de revolución.

La distancia entre las dos bases se denomina **altura** del cilindro y coincide en valor con la generatriz del mismo.

El **área lateral** del cilindro se obtiene multiplicando la longitud de la circunferencia de la base por la altura.

Sumando el área de las bases al área lateral se obtiene el **área total** del cilindro.

El **volumen** del cilindro es igual al producto del área de la base por la altura.



$$\text{Área} = 2 \cdot A_B + A_L = 2\pi r(r+h)$$

$$\text{Volumen} = A_B \cdot h$$

### • CONO

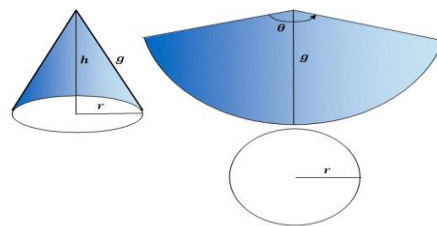
Se llama cono de revolución al cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo que gira sobre uno de sus catetos tomados como eje de rotación.

Se produce así un cuerpo geométrico limitado por un círculo, denominado base, y por una superficie curva llamada superficie cónica de revolución.

Se denomina **generatriz** del cono a la hipotenusa del triángulo rectángulo que engendra, al girar sobre uno de los catetos, la superficie lateral del cono.

**Vértice** del cono es el vértice superior del triángulo generador del mismo.

Altura del cono es la distancia que hay entre el vértice y la base.



$$\text{Área} = A_B + A_L = \pi r(r+g)$$

$$\text{Volumen} = (A_B \cdot h) / 3$$

- **ESFERA**

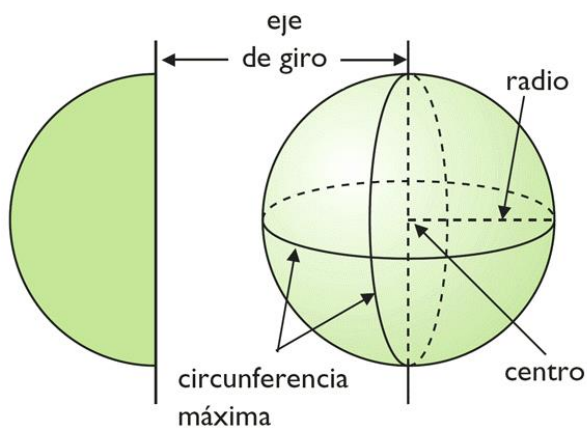
Cuerpo geométrico engendrado por la rotación de un semicírculo que gira alrededor de su diámetro, tomado como eje de revolución.

La superficie que delimita la esfera se llama superficie esférica.

Todos los puntos de la esfera equidistan de un punto interior denominado **centro** de la esfera.

**Radio** de una esfera es el segmento que une al centro con un punto cualquiera de la superficie esférica.

**Diámetro** de una esfera es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la superficie esférica, pasando por el centro de la misma.



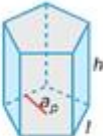
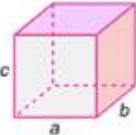
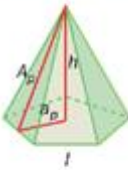

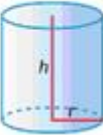

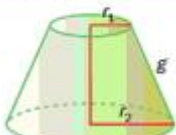
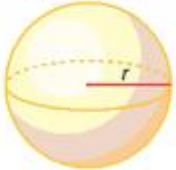
$$\text{Área} = 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen} = (4\pi r^3)/3$$

*Donde r=radio de la esfera*



**TABLA RESUMEN**

Áreas y volúmenes			
Prisma	Ortoedro	Pirámide	Tronco de pirámide
 $A_L = p \cdot h$ $A_T = p \cdot (h + a_p)$ $V = A_{BASE} \cdot h$	 $A_T = 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c$ $V = a \cdot b \cdot c$	 $A_L = \frac{1}{2} p_p \cdot A_p$ $A_T = \frac{1}{2} p_p \cdot (A_p + a_p)$ $V = \frac{A_{BASE} \cdot h}{3}$	 $A_L = \frac{p_1 + p_2 \cdot H}{2}$ $A_T = A_L + \text{Áreas}_{BASES}$ $V_{TRONCO} = V_{PIRÁMIDE COMPLETA} - V_{PIRÁMIDE SOBRANTE}$
Cilindro	Cono	Tronco de cono	Superficie esférica y esfera
 $A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ $A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$ $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$	 $A_L = \pi \cdot r \cdot g$ $A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$ $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$	 $A_L = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g$ $A_T = A_L + \text{Áreas}_{BASES}$ $V_{TRONCO} = V_{CONO TOTAL} - V_{CONO SOBRANTE}$	 $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$



## TEMA 6: PROBABILIDAD

### 6.1.- CONCEPTOS BÁSICOS:

- Un **suceso aleatorio** es aquel acontecimiento en cuya realización influye el azar. Los sucesos aleatorios ocurren en experiencias aleatorias, que son aquellas cuyo resultado depende del azar. Es decir, no se puede predecir el resultado con anterioridad.

*Ejemplo: Lanzar un dado y considerar el resultado obtenido*

- **Suceso** es todo subconjunto del espacio muestral.. Se llaman sucesos elementales ó sucesos individuales. El espacio muestral se llama suceso seguro.

*Ejemplo: Sacar un 3*

Existen dos tipos de sucesos:

- Simples o elementales: *Sacar un 5*
- Compuestos (formados por varios elementales): *Sacar un nº par {2, 4, 6}*

- **Espacio muestral, E**, es el conjunto de todos los casos posibles.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

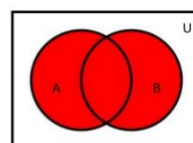
### 6.2.- RELACIONES ENTRE SUCESOS

- ✓ Se llama **unión** de dos sucesos A y B, y se designa  $A \cup B$  (se lee “A unión B”) al suceso formado por todos los elementos de A y los de B. El suceso  $A \cup B$  ocurre cuando lo hacen A o B o ambos.

- ✓ Se llama **intersección** de dos sucesos A y B, y se designa  $A \cap B$  (se lee “A intersección B”) al suceso formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B. El suceso  $A \cap B$  ocurre cuando lo hacen a la vez A y B.

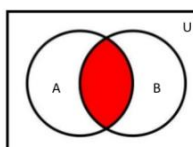
- Unión.

$$A \cup B$$



- Intersección

$$A \cap B$$



- ✓ Dos sucesos se llaman **incompatibles** cuando no tienen en común ningún suceso elemental. Es decir, es imposible que ocurran simultáneamente. Si dos sucesos  $A$  y  $B$  son incompatibles, entonces  $A \cap B = \emptyset$

*Ejemplo: Sacar cara y cruz al lanzar una moneda*

- ✓ Un suceso,  $A = \bar{A}$ , se dice que es **contrario** del suceso  $S$  cuando entre ambos se reparten los elementos del espacio muestral. Es decir, siempre ocurre uno u otro, pero nunca ocurren simultáneamente.

Si  $\bar{A}$  es el suceso contrario de  $A$ , entonces:  $A \cup \bar{A} = E$  y  $A \cap \bar{A} = \emptyset$

y, por tanto,  $A + \bar{A} = 1$

*Ejemplo: Sacar cara es el suceso contrario a sacar cruz al lanzar una moneda*

### 6.3.- PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES DE LOS SUCESOS

La probabilidad de que ocurra el suceso seguro es 1; esto es natural, pues ocurre el 100% de las veces que se realiza la experiencia. También es natural que ese 100 % se reparta entre los sucesos elementales de que consta la prueba.

#### **Propiedades de la probabilidad:**

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(E) = 1$
- $\emptyset \neq A \neq E \quad 0 < P(A) < 1$
- $P(\bar{S}) = 1 - P(S)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



## 6.4.- CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Si todos los sucesos de una experiencia son equiprobables (tienen la misma probabilidad) entra en juego la **Ley de Laplace**, que dice:

- Si el espacio muestral tiene  $n$  casos todos ellos tienen la misma probabilidad,  $1/n$ .

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables a S}}{\text{número total de casos posibles}}$$

*Ejemplo: La probabilidad de sacar un 5 en un dado es de  $\frac{1}{6}$*

## 6.5.- EXPERIENCIAS COMPUESTAS

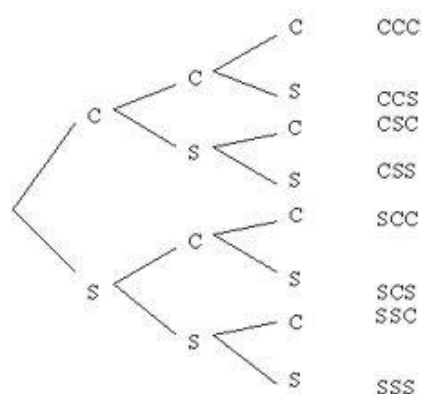
Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser dependientes o independientes.

- ✓ Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.
- ✓ Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

## **EXTRACCIONES CON O SIN REEMPLAZAMIENTO**

- Con reemplazamiento  $\Rightarrow$  Independientes
- Sin reemplazamiento (Lo normal)  $\Rightarrow$  Dependientes

Para el cálculo más sencillo de este tipo de probabilidades se utiliza el concepto de **diagrama de árbol**.



# PROBLEMAS



## TEMA 1: NÚMEROS REALES

### RELACIÓN ENTRE NÚMERO DECIMAL Y SU FRACCIÓN EQUIVALENTE

1. Halla la fracción irreducible de los siguientes decimales:

- 2,25                      • 0,6                      • 3,06                      • 12,25                      • 2,75
- 0,0075                      • 0,00125                      • 31,48                      • 14,3                      • 0,005

2. Halla la fracción irreducible de los siguientes decimales periódicos puros:

- $3,\widehat{6}$                       • 0,27                      • 2,27                      •  $15,\widehat{3}$
- 3,24                      • 6,54                      • 3,336                      • 0,75
- $9,\widehat{1}$                       • 0,369                      •  $3,\overline{53}$

3. Halla la fracción irreducible de los siguientes decimales periódicos mixtos:

- $3,0\widehat{6}$                       •  $0,2\widehat{7}$                       •  $3,06\widehat{9}$                       • 6,027
- $0,8\widehat{3}$                       •  $0,65\widehat{4}$                       • 1,168                      •  $5,12\widehat{3}$

### OPERACIONES COMBINADAS

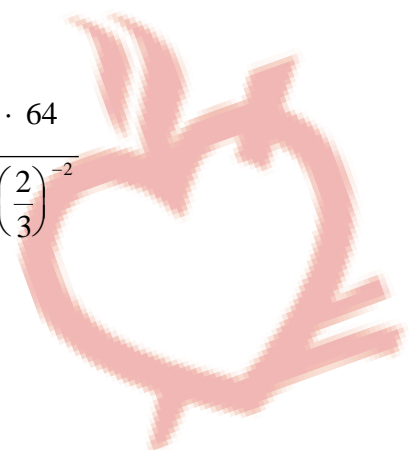
4. Calcula:

$$\frac{\frac{11}{4} - \frac{2}{25}}{2,25 - \frac{3}{8}} \div 0,89$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + 0,75}$$

5. Calcula:

$$\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{-1} \cdot 64}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$$



5. Calcula:

$$\frac{3,54 - 3,27}{6,36 - 3,45} \cdot \frac{18,6}{0,25} \cdot \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}}{\frac{4}{3} + 0,8\bar{3}}$$

6. Calcula:

$$\frac{3^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8^2 \cdot 64^{-2}}{2^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0}$$

7. Calcula:

$$\frac{\frac{1,3 - 0,6}{6,3 - 3,6} \cdot \frac{4}{0,125}}{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{\left(0,25 + \frac{3}{8}\right) : \frac{1}{5}}}$$

8. Calcula:

$$\frac{\frac{17}{20} + 1,15}{2\frac{1}{4} + 2,05} \cdot \frac{\frac{43}{49}}{\frac{1}{23}} \cdot \frac{3\frac{3}{4} - 2,6}{4\frac{1}{4} - 1,8}$$

9. Calcula:

$$\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{2^{-3} \cdot 3^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

10. Calcula:

$$\frac{0,08^{-2} \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 0,1^{-6}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot 0,02^{-3}}$$

11. Calcula:

$$\frac{\frac{0,08\bar{3} + 0,625}{\frac{1}{4} + 0,1\bar{6} - \frac{1}{12}} \cdot \frac{81}{17}}{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) : 0,2} \cdot \frac{\left(\frac{9}{4} - 1,6\right) : 0,75}{17}$$

12. Calcula:

$$\frac{4,3 - \frac{17}{6}}{0,1 + 0,1\bar{6}} \cdot 19,4 \cdot \frac{\frac{11}{5} - 0,45}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 0,6}$$



13. Calcula:

$$\frac{\frac{6,\widehat{3} - 3,\widehat{6}}{9,\widehat{6} - 9,3\widehat{6}} \cdot \frac{0,72}{0,04}}{\left(0,25 + \frac{3}{8}\right) : 0,125} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}}{\frac{3}{2}}$$

14. Calcula:

$$\frac{0,2^{-3} \cdot 0,25^{-2}}{8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}}$$

15. Calcula:

$$\frac{0,2^{-3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4}{10^{-2} \cdot 0,5^{-1} \cdot 8^{-1}}$$

16. Calcula:

$$\frac{\frac{1,09 - 0,54}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) : 0,1\widehat{6}}}{\frac{(0,2\widehat{6} - 0,2) : 0,4}{\left(0,\widehat{6} + \frac{1}{9}\right) \cdot 0,5\widehat{3}}} : 0,113$$

17. Calcula:

$$\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} \cdot 36^{-1} \cdot \frac{1}{2}}{(0,\widehat{6})^{-2} \cdot 18^{-2}}$$

18. Calcula:

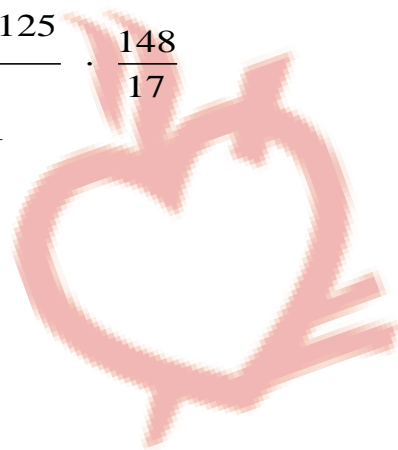
$$\frac{\frac{7,\widehat{1} - 2,\widehat{7}}{5,\widehat{4} - 3,\widehat{6}}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{16}} : 0,1$$

19. Calcula:

$$\frac{\frac{3,18 - 2,27}{2,2\widehat{7} - \frac{13}{6}} \cdot 3,52}{\frac{\frac{13}{6} - 0,8\widehat{3}}{0,25 + \frac{11}{6}}}$$

20. Calcula:

$$\frac{\frac{0,75 + \frac{7}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 0,125} \cdot \frac{148}{17}}{\frac{0,6 + \frac{5}{2}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{2}}}$$



21. Calcula:

$$\frac{\left(2 - \frac{3}{5} + 0,1\bar{6}\right) \cdot 8,3}{4 - \frac{25}{8} - 0,25} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1,48 - 1,09}{1,18 - \frac{5}{22}}\right) : \frac{1}{7}}$$

22. Calcula:

$$\frac{(0,\bar{6} - 0,6\bar{3}) \cdot \frac{9}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{7}{4} - \frac{5}{3}} \cdot \frac{17}{175} \cdot \frac{\left(2,\bar{3} - \frac{11}{6}\right) : \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{9} + 3,\bar{6}\right) : \frac{5}{3}}$$

23. Calcula:

$$\frac{10^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}{0,02 \cdot 0,25^{-4}}$$

24. Calcula

$$\frac{6^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \cdot 0,25}{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 18^{-1}}$$

25. Calcula:

$$\frac{\frac{\frac{3}{2} - 1,\bar{6}}{1,25 + 0,\bar{3}}}{3,36 - 3,36} \cdot 0,608}{0,5 - \frac{1}{8}}$$

26. Calcula:

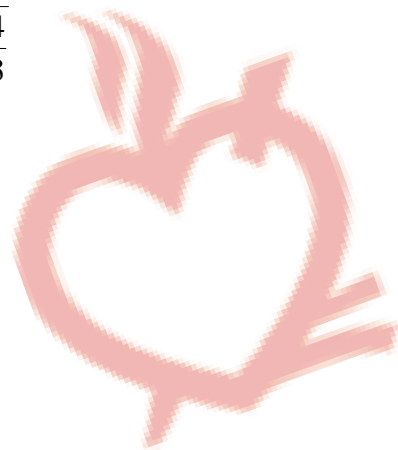
$$\frac{\frac{2,25 - 2,25}{0,\bar{3} - 0,3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 0,36} \cdot 112,2 \cdot \frac{0,227 - \frac{2}{11}}$$

27. Calcula:

$$\frac{\frac{1,09 - 0,63}{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + 0,45}}{0,72 + 1,\bar{3}} \cdot \frac{8,448}{0,09} \cdot \frac{1,36 - \frac{2}{3}}$$

28. Calcula:

$$\frac{1,54 - \frac{3}{22}}{1,36 + 0,63} \cdot \frac{0,99}{\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{3}{2}} \cdot \frac{31}{162} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{3}}$$



29. Calcula:

$$\frac{\left(0,72 + \frac{7}{22}\right) \cdot \frac{11}{5}}{\left(\frac{13}{11} - \frac{5}{22}\right) : 0,81} \cdot 13,3$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{5}{9}\right) : 0,5}{\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{7}{2}}$$

30. Calcula:

$$\frac{3,24 - 3,24}{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) \cdot \frac{1}{2}} : 0,125$$

$$\frac{3,54 - 3,54}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{4}}$$

31. Calcula:

$$\frac{(1,27 - 0,6) \cdot \frac{1}{4}}{\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \cdot \frac{1}{2}} \cdot 3,432$$

$$\frac{(1,45 - 0,3) \cdot \frac{3}{4}}{\left(0,6 + \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2}}$$

32. Calcula:

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{8}\right) \cdot 3,6}{\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{8}} : \frac{1}{0,09}$$

$$\frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) : 2,25}{\left(0,25 + \frac{11}{4}\right) \cdot 1,05}$$

33. Calcula:

$$\frac{0,16^{\widehat{-2}} \cdot 36^{-1} \cdot 13,4^{\widehat{4}} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 0,27^{-2} \cdot 3^2}$$

34. Calcula:

$$\frac{10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-3}}{2^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot 8^0}$$

35. Calcula:

$$\frac{1,5\widehat{3} + 0,2\widehat{3}}{0,2\widehat{6} - \frac{1}{30}} : 0,56$$

$$\frac{\left(\frac{9}{14} - \frac{2}{7}\right) \cdot 13,25}{\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) : 0,0\widehat{3}}$$



**PROBLEMAS CON NÚMEROS RACIONALES**

36. He recorrido los  $\frac{2}{7}$  de un camino y aún me faltan 3 km. para llegar a su mitad. ¿Cuánto mide el camino?
37. Hemos vaciado los  $\frac{2}{5}$  de un depósito. Cuando saquemos 100 litros más habremos llegado a su mitad. ¿Qué capacidad tiene el depósito?
38. Los  $\frac{2}{5}$  de mi dinero me permiten comprar 8 lapiceros a 15 céntimos. cada uno. ¿Cuánto tengo?
39. Hemos vendido los  $\frac{2}{5}$  de una parcela de terreno por 1080 €. ganando en la operación 360 € ¿Cuánto nos costó la parcela?
40. Hemos vendido la cuarta parte de un terreno por 2100 €. Posteriormente vendemos al mismo precio  $\frac{1}{6}$  del resto. ¿Cuánto debemos cobrar?
41. Un alumno ha hecho los  $\frac{2}{7}$  de un trabajo, y otro ha hecho  $\frac{3}{8}$  del mismo trabajo. ¿Quién está más adelantado?
42. He recorrido los  $\frac{3}{8}$  de un camino. Cuando recorra 5 km. más, habré llegado a su mitad. ¿Cuánto mide el camino?
43. He vaciado los  $\frac{3}{7}$  de un depósito de aceite. Cuando saque 3 litros más, habremos llegado a su mitad. ¿Cuál es la capacidad del depósito?
44. Hemos vaciado los  $\frac{13}{18}$  de un depósito y aún nos quedan por sacar 15 litros. ¿Cuál es la capacidad del depósito?
45. El rendimiento de cierta clase de trigo es  $\frac{7}{8}$  en harina y el de esta harina en pan  $\frac{26}{25}$ . ¿Cuántos kg. de trigo necesitamos para fabricar 5.460 kg. de pan?
46. Hemos recorrido los  $\frac{3}{7}$  de un camino y aún nos quedan 4 km. para llegar a su mitad. ¿Cuánto mide el camino?
47. Hemos vaciado los  $\frac{4}{5}$  de un estanque y aún nos quedan por sacar 1.080 litros. ¿Cuál es la capacidad del estanque?
48. En un examen de Matemáticas  $\frac{1}{13}$  de los alumnos presentados obtuvieron sobresaliente; la sexta parte del resto, notable. Otra sexta parte del nuevo resto, bien; los  $\frac{3}{5}$  del nuevo resto, suficiente, y no aprobaron 10 alumnos. ¿Cuántos alumnos se presentaron y cómo se repartieron las calificaciones?
49. Las páginas de un libro de Matemáticas se distribuyen así:  $\frac{2}{5}$  Aritmética;  $\frac{5}{9}$  del resto Geometría;  $\frac{7}{8}$  del nuevo resto trigonometría y las 30 páginas finales ejercicios y problemas. ¿Cuántas páginas tiene el libro y cuántas cada apartado?

50. Las páginas de un libro de Sociales se distribuyen así:  $\frac{3}{5}$  Geografía,  $\frac{2}{3}$  del resto Historia,  $\frac{7}{8}$  del nuevo resto Ética y las 8 páginas finales Vocabulario. ¿Cuántas páginas tiene el libro y cuántas cada apartado?
51. Las páginas de un libro de Matemáticas se distribuyen así:  $\frac{3}{8}$  Aritmética;  $\frac{2}{3}$  del resto Geometría;  $\frac{4}{5}$  del nuevo resto Trigonometría y las 20 páginas finales ejercicios y problemas. ¿Cuántas páginas tiene el libro y cuántas cada apartado?
52. Las páginas de un libro de sociales se distribuyen así:  $\frac{2}{5}$  Geografía;  $\frac{5}{9}$  del resto Historia;  $\frac{5}{8}$  del nuevo resto Ética;  $\frac{2}{3}$  del nuevo resto Vocabulario y las 20 páginas finales mapas. ¿Cuántas páginas tiene el libro y cuántas cada apartado?
53. Las páginas de un libro de Naturaleza se distribuyen así:  $\frac{2}{5}$  Geología;  $\frac{5}{9}$  del resto Botánica;  $\frac{7}{12}$  del nuevo resto Biología, y las 60 páginas finales Zoología. ¿Cuántas páginas tiene el libro y cuántas cada apartado?
54. La densidad de cierto tipo de leche es 1,025 kg./litro. Los  $\frac{4}{15}$  del peso de la leche se transforma en crema y los  $\frac{3}{8}$  del peso de la crema en mantequilla. Hemos obtenido 6,15 kg. de mantequilla. ¿Cuántos litros de leche hemos empleado?



**TEMA 2: NÚMEROS RADICALES**

55. Calcula (si es posible) el valor de:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{64} = & \sqrt{\frac{4}{225}} = & \sqrt{-16} = & \sqrt[3]{\frac{-27}{64}} = & \sqrt[3]{\frac{1}{729}} = \\ \sqrt{144} = & \sqrt{81} = & \sqrt[3]{\frac{-8}{125}} = & \sqrt{-25} = & \sqrt[3]{64} = \end{array}$$

56. – Extrae las siguientes raíces:

$$\begin{array}{cccc} \sqrt[3]{-27} = & \sqrt[3]{-216} = & \sqrt{\frac{216}{343}} = & \sqrt[3]{729} = \\ \sqrt[3]{\frac{729}{512}} = & \sqrt[3]{-125} = & \sqrt[4]{16} = & \sqrt[3]{\frac{b^6}{216}} = \\ \sqrt[4]{-81} = & \sqrt[3]{\frac{-1}{27b^6}} = & \sqrt[4]{625} = & \sqrt[4]{-1296} = \\ \sqrt[5]{\frac{-32}{b^{10}}} = & \sqrt{4x^6y^{12}} = & \sqrt[4]{14641} = & \\ \sqrt[5]{-32} = & \sqrt[5]{243} = & \sqrt[5]{a^{10}} = & \\ \sqrt[3]{8b^3} = & \sqrt[5]{-3125} = & & \\ \sqrt[4]{-1296b^8} = & \sqrt[5]{-243b^{15}} = & \sqrt[5]{-1024b^{10}x^{15}} = & \\ \sqrt[5]{1024} = & \sqrt{\frac{1}{64}} = & & \end{array}$$



$$\begin{array}{cccc} \sqrt{2,7} = & \sqrt{\frac{9}{25}} = & \sqrt{7,1} = & \sqrt{\frac{-16}{36}} = \\ \sqrt{\frac{-25}{144}} = & \sqrt[3]{\frac{-27x^6}{125a^3b^9}} = & \sqrt[3]{-343b^9} = & \sqrt[5]{32b^{80}} = \\ \sqrt{\frac{1}{4}b^6} = & \sqrt[3]{\frac{-27}{64}x^{12}m^6} = & \sqrt[7]{-128m^{14}c^{42}} = & \sqrt[4]{81c^8m^{12}} = \\ \sqrt[3]{\frac{-8}{729}b^6m^{36}} = & \sqrt[3]{0,001} = & & \end{array}$$

57. Extraer todos los factores posibles:

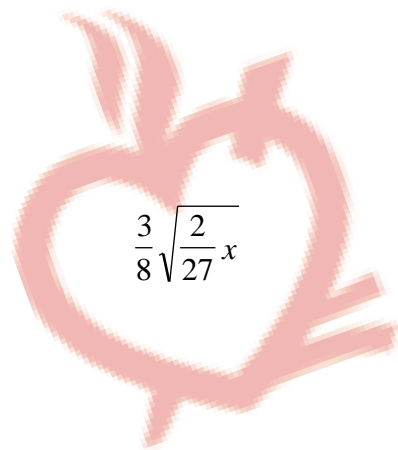
$$\begin{array}{cccc} \sqrt{216b^4} = & \sqrt{1024b^5} = & \sqrt{36b^3x^{12}} = & \sqrt{\frac{1}{4}b^3} = \\ \sqrt{\frac{1}{32}b} = & \sqrt{\frac{18b^6}{75b^3}} = & \sqrt[3]{8b^6c^5} = & \sqrt[3]{125b^4x^7} = \\ \sqrt[3]{64b^{12}x^9y^6} = & \sqrt[4]{1024x^5} = & \sqrt[4]{243b^7} = & \sqrt[4]{32b^5m^9} = \end{array}$$

58. Extrae los factores posibles de cada radical:

$$\begin{array}{cccc} \sqrt[3]{81b^7} = & \sqrt[5]{128m^{10}} = & \sqrt[7]{256b^{14}c^{11}} = & \sqrt[5]{3125m^{10}c^{13}b^{37}} = \\ \sqrt[4]{b^7m^3} = & \sqrt[5]{1024m^{37}c^{18}} = & \sqrt{2,7b^3} = & \sqrt[3]{\frac{216}{343}m^{12}b^{15}c} = \\ \sqrt[3]{0,001b^7} = & \sqrt[3]{\frac{8}{729}b^5m^{14}} = & \sqrt[5]{\frac{1}{243}b^7m^{45}} = & \sqrt{324b^3x} = \end{array}$$

59. Introduce los factores en el radical y simplifica:

$$\begin{array}{cccc} 2x\sqrt{x} & 3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx} & \frac{4x}{3}\sqrt{\frac{9}{4}xy} & \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x} \\ 3\sqrt[3]{3} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{9} & \frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}} & \end{array}$$



60. Efectúa las siguientes operaciones:

a)  $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} =$

c)  $6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

e)  $3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - 3\sqrt{32} =$

g)  $2\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{180} + 3\sqrt{125} =$

i)  $\frac{2}{5}\sqrt{20} - \frac{3}{5}\sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{180} + 6\sqrt{45} =$

k)  $5\sqrt{44} - 3\sqrt{275} + 6\sqrt{396} - \sqrt{1331} =$

b)  $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$

d)  $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} =$

f)  $4\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 6\sqrt{300} - \sqrt{108} =$

h)  $\frac{1}{4}\sqrt{128} + 6\sqrt{512} - \frac{1}{2}\sqrt{32} - 3\sqrt{98} =$

j)  $\frac{4}{3}\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{243} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} =$

l)  $7\sqrt{28} - 4\sqrt{63} + 5\sqrt{343} - 2\sqrt{7} =$

m)  $2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{125} - \sqrt{500} + 2\sqrt{180} =$

n)  $3\sqrt{99} - 4\sqrt{44} + 5\sqrt{1331} - 2\sqrt{1100} + 3\sqrt{539} =$

61. Efectúa las siguientes operaciones:

a)  $2\sqrt{8} - 3\sqrt{72} + 5\sqrt{200} - 4\sqrt{722} + 5\sqrt{\frac{2}{25}} =$

b)  $7\sqrt{40} - 5\sqrt{90} + 6\sqrt{1000} - 3\sqrt{6250} + 20\sqrt{10} =$

c)  $\frac{1}{2}\sqrt{500} + \frac{1}{4}\sqrt{80} - 3\sqrt{320} + 6\sqrt{245} =$

d)  $3\sqrt{135} + 2\sqrt{60} + 3\sqrt{1500} - 5\sqrt{15} =$

d)  $2\sqrt{6} - 3\sqrt{54} + 3\sqrt{150} + 3\sqrt{24} =$

e)  $3\sqrt{8} - 5\sqrt{32} + 16\sqrt{162} - 5\sqrt{18} =$

62. Efectúa las siguientes operaciones:

a)  $9\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8} =$

d)  $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{75} =$

g)  $9\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot 3\sqrt{80} =$

j)  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} \cdot 8\sqrt{54} =$

b)  $4\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot 7\sqrt{3} =$

e)  $9\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{\frac{25}{6}} =$

h)  $2\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot 5\sqrt{96} =$

k)  $16\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{8}} =$

c)  $3\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 5\sqrt{32} =$

f)  $4\sqrt{\frac{1}{72}} \cdot 2\sqrt{18} =$

i)  $\frac{6\sqrt{32} \cdot 5\sqrt{8}}{12} =$

l)  $\frac{2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{25} \cdot \sqrt{3}}{5\sqrt{15}} =$

$$\begin{array}{ll}
 \text{m) } (15 \sqrt{32}) : (3 \sqrt{2}) = & \text{n) } (54 \sqrt{18}) : (9 \sqrt{\frac{1}{2}}) = \quad \text{ñ) } (7 \sqrt{22}) : (\frac{1}{28} \sqrt{0,72}) = \\
 \text{o) } (48 \sqrt{6}) : (3 \sqrt{\frac{3}{2}}) = & \text{p) } (4 \sqrt{48}) : (2 \sqrt{\frac{1}{3}}) = \quad \text{q) } (4 \sqrt{96}) : (\frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{8}}) = \\
 \text{r) } (12 \sqrt{\frac{1}{3}}) : (\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{12}}) = & \text{s) } (26 \sqrt{18}) : (2 \sqrt{\frac{9}{50}}) = \quad \text{t) } (\frac{2}{3} \sqrt{96}) : (\frac{1}{9} \sqrt{0,6}) = \\
 \text{u) } (48 \sqrt{\frac{1}{2}}) : (4 \sqrt{0,05}) = & \text{v) } (\frac{4}{3} \sqrt{48}) : (\frac{1}{9} \sqrt{3}) = \quad \text{w) } (\frac{1}{6} \sqrt{288}) : (\frac{1}{18} \sqrt{\frac{1}{2}}) = \\
 \text{x) } \frac{5 \sqrt{2} \cdot 3 \sqrt{8}}{10} = & \text{y) } \frac{3 \sqrt{6} \cdot 25 \sqrt{150}}{45} = \quad \text{z) } (\sqrt{5} + 2 \sqrt{2})^2 =
 \end{array}$$

63. Efectúa las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \frac{3 \sqrt{27} \cdot 4 \sqrt{12}}{6} = & \text{b) } \sqrt{\frac{(0,2^{-3}) : (\frac{2}{5})^{-3}}{2}} \\
 \text{c) } \frac{(2 \sqrt{48} + 3 \sqrt{75} - 2 \sqrt{27}) \cdot 8 \sqrt{2}}{2 \sqrt{96}} = & \text{d) } \frac{(3 \sqrt{24} + 2 \sqrt{150}) \cdot 2 \sqrt{3}}{48 \sqrt{2}} = \\
 \text{e) } \frac{(3 \sqrt{80} + 5 \sqrt{180}) \cdot 2 \sqrt{3}}{\sqrt{735}} = & \text{f) } \frac{(3 \sqrt{6} - \sqrt{24} + 2 \sqrt{54}) \cdot 8 \sqrt{3}}{\sqrt{288}} =
 \end{array}$$

64. Calcula aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } (3 - 2 \sqrt{2}) (2 \sqrt{2} - 3) = \\
 \text{b) } (2 - \sqrt{3}) (2 \sqrt{3} - 2) = \\
 \text{c) } (5 - \sqrt{2}) (2 - \sqrt{5}) =
 \end{array}$$



65. Calcula:

$$\frac{(2\sqrt{24} - \sqrt{48})(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{\frac{7\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{12}}{14}} =$$

66. Calcula:

$$\frac{(2\sqrt{54} - 6\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}}{5}} =$$

67. Efectúa las siguientes operaciones:

a)  $\sqrt{2}(\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18})$

b)  $\sqrt{3}(\sqrt{108} - \sqrt{27} + \sqrt{48})$

c)  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(6\sqrt{5} + 6\sqrt{3})$

d)  $(6\sqrt{6} - 6\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})$

e)  $(4\sqrt{6} - 4\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})$

f)  $(\sqrt{180} + \sqrt{162}) \cdot (\sqrt{20} - \sqrt{18})$

68. Efectúa las siguientes operaciones:

a)  $2\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{250}$

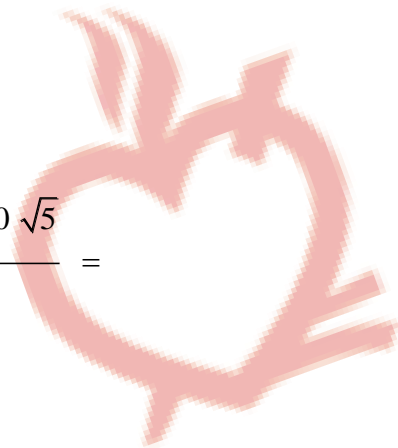
b)  $2\sqrt[4]{4375} - \sqrt[4]{9072} - 3\sqrt[4]{567} + \sqrt[4]{112}$

c)  $5\sqrt[4]{176} - 3\sqrt[4]{891} + 6\sqrt[4]{6875} - 2\sqrt[4]{14256}$

d)  $2\sqrt[3]{1029} - 5\sqrt[3]{192} + 3\sqrt[3]{648}$

69. Calcula

$$\frac{\left(2\sqrt{45} + \frac{3}{2}\sqrt{72}\right) \cdot (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}) \cdot 10\sqrt{5}}{2\sqrt{180}} =$$



**TEMA 3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

70. Dados los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}A &= 2x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 7x \\B &= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 5x - 4 \\C &= 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 9x + 3 \\D &= 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x + 6\end{aligned}$$

Calcula:

- $A + B + C + D$
- $A - B - C + D$
- $2A - 3B + C - D$
- $(2A - 3B) - (2C + D)$

71. Dados los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}A &= 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 5 \\B &= 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5 \\C &= 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5 \\D &= 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 3\end{aligned}$$

Calcula:

- $2A - 3B + C - D$
- $(3A - 2B) - (2D - 3C)$
- $(3A - 2C) - (3D + 2B)$

72. Efectúa los siguientes productos:

- $(6x^3 - 4x^2 + 5x - 2) \cdot (3x^3 - 4x^2 + 5x - 3)$
- $(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 4) \cdot (3x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$

73. Efectúa los siguientes productos:

- $(2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 4x + 3) \cdot (2x^2 - 9x + 6)$
- $(2x^3 - 4x^2 + 5x - 4) \cdot (3x^2 - 5x + 6)$

74. Dados los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}A &= 2x^2 - 5x + 6 \\B &= 3x^2 - 4x + 5 \\C &= 2x^3 - 4x + 3 \\D &= 2x^2 - 5x + 6\end{aligned}$$

Calcula:

- $(A \times B) - (C \times D)$
- $(A \times C) - (B \times D)$
- $(A \times D) - (B \times C)$



75. Dados los polinomios:

$$A = 4x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 5x - 3$$

$$B = 2x^5 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 2$$

$$C = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 4x + 3$$

$$D = 2x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 2$$

Calcula:

- $2A - 3B - C + D$
- $(3A - 2B) - (3C + 2D)$
- $A^2 - B^2 + C^2 - D^2$

76. Efectúa la siguiente operación:

$$\bullet (2x^3 - 4x^2 + 5x - 3)^2 - (3x^3 + 4x^2 - 5x + 1)^2$$

77. Calcula:

$$\bullet [(2x^2 - 5x + 3) \cdot (4x^2 + 2x - 5)] \cdot 2x^3$$

78. Efectúa las siguientes operaciones:

$$a) (6x^3 - 4x^2 + 5x - 4)^2 - (3x^3 + 5x^2 - 4x + 2)^2$$

$$b) (3x^3 - 4x^2 + 6)^2 - (2x^3 + 4x - 3)^2$$

$$c) [(2x^2 - 4x + 5) \cdot (3x^2 - 4x + 7)] - (5x^2 - 4x + 3)^2$$

$$d) [(6x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 - 4x + 5)] - (3x^2 + 4x - 2)^2$$

79. Efectúa las siguientes divisiones

$$a) (18x^6 - 33x^5 + 7x^4 - 11x^3 + 31x^2 - 21x + 9) : (2x^2 - 5x + 3)$$

$$b) (10x^7 - 26x^5 + 33x^4 + 6x^3 - 31x^2 + 32x - 15) : (2x^3 - 4x + 5)$$

$$c) (6x^6 + 22x^5 + 23x^4 - 5x^3 - 34x^2 + 45x - 18) : (2x^2 + 4x - 3)$$

$$d) (18x^7 - 6x^6 + 27x^5 - 41x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 17x + 12) : (2x^3 + 3x - 4)$$

$$e) (8x^6 - 20x^5 + 22x^4 - 32x^3 + 30x^2 - 20x + 12) : (2x^3 - 2x^2 - 4)$$

$$f) (12x^7 - 18x^6 - 12x^5 - 6x^4 + 57x^3 + 12x^2 - 72x + 24) : (2x^3 - 3x^2 - 2x + 4)$$

$$g) (18x^6 - 36x^5 + 61x^4 - 64x^3 + 45x^2 - 25x + 6) : (3x^3 - 4x^2 + 5x - 3)$$

$$h) (4x^6 - 30x^5 + 76x^4 - 89x^3 + 72x^2 - 51x + 18) : (2x^2 - 9x + 6)$$

$$i) (6x^7 - 23x^6 + 48x^5 - 68x^4 + 72x^3 - 53x^2 + 30x - 8) : (3x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$$

$$j) (6x^5 - 22x^4 + 47x^3 - 61x^2 + 50x - 24) : (3x^2 - 5x + 6)$$

**80.** Calcula el cociente y el resto empleando las Reglas de Ruffini

- a)  $(6x^4 - 4x^3 + 2x - 6) : (x - 3)$
- b)  $(5x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5) : (x + 1)$
- c)  $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 4) : (x - 2)$
- d)  $(5x^4 - 4x^3 + x^2 - 4) : (x - 1)$
- e)  $(3x^6 - 3) : (x - 1)$
- f)  $(3x^6 + 3) : (x + 1)$

**81.** Calcula el cociente y el resto empleando las Reglas de Ruffini

- a)  $(x^4 - 4x^2 + 8) : (x - \frac{1}{2})$
- b)  $(x^4 - 6x^2 + 12) : (x - \frac{1}{3})$
- c)  $(x^4 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 2)$
- d)  $(x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 2) : (x + 2)$
- e)  $(x^6 - \frac{1}{64}) : (x - \frac{1}{2})$
- f)  $(x^4 + 2x^2 - 8) : (x + \frac{1}{2})$
- g)  $(\frac{1}{2}x^4 + 8x^2 - 40) : (x - 2)$

**82.** Calcula las raíces enteras y factoriza

- a)  $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$
- b)  $x^4 + 9x^3 + 19x^2 - 9x - 20$
- c)  $x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 32x - 60$
- d)  $x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 8x + 60$
- e)  $x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12$
- f)  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$
- g)  $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8$

**83.** Calcula las raíces enteras y factoriza

- a)  $x^4 - 7x^3 - 17x^2 - 17x + 6$
- b)  $x^4 - 9x^3 + 14x^2 + 36x - 72$
- c)  $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$



d)  $x^4 + 5x^3 + 19x^2 + 125x - 150$

e)  $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$

84. Calcula el valor numérico del polinomio

$$x^4 - 5x^2 + 2x - 3 \quad \text{para } x = 2$$

85. Calcula el valor numérico del polinomio

$$x^5 - 3x^2 + 2x - 8 \quad \text{para } x = 1/2$$

86. Calcula el valor numérico del polinomio

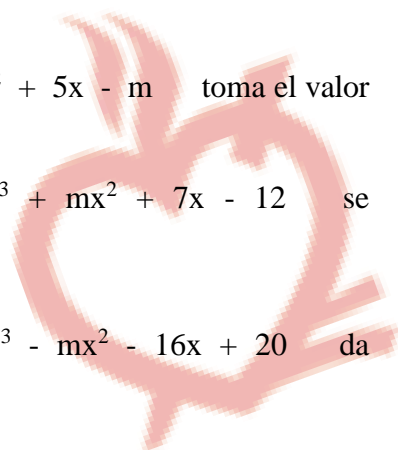
$$5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 4 \quad \text{para } x = -2$$

87. Calcula el valor numérico del polinomio

$$6x^4 - 2x^3 + 3x - 6 \quad \text{para } x = -1/3$$

88. Calcula el valor numérico del polinomio

$$x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5x + 2 \quad \text{para } x = \pm 1$$

89. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - m$  es divisible por  $x - 1$ ?90. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - m$  es divisible por  $x - 3$ ?91. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $x^4 + 2x^3 - 19x^2 - mx + 60$  es divisible por  $x - 3$ ?92. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $x^4 + 8x^3 + 11x^2 - mx - 60$  es divisible por  $x + 3$ ?93. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + m$  se anula siendo  $x = 2$ ?94. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $x^4 - 2x^2 + 5x - m$  toma el valor 3 siendo  $x = 2$ ?95. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $x^4 - 7x^3 + mx^2 + 7x - 12$  se anula para  $x = -1$ ?96. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $x^4 + 4x^3 - mx^2 - 16x + 20$  da como resto cero al dividirlo por  $(x + 5)$ ?

97. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + (m + 1)x - 46$  es divisible por  $(x - 2)$ ?

98. ¿Para qué valor de “m” el polinomio

$$2x^5 - 9x^4 + 10x^3 - (2m + 1)x^2 + 41x - 18 \quad \text{se anula siendo } x = 1/2?$$

99. ¿Para qué valor de “m”,  $(x + 2)$  es un factor del polinomio

$$2x^5 + x^4 + 2mx^2 - x + 6$$

100. Calcula k para que el polinomio:  $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + k$  sea divisible por  $(x + 1)$ .

101. Calcula “m” para que el polinomio

$$2x^5 - 9x^4 + 15x^3 - 23x^2 + (3m + 1)x - 12 \quad \text{admita como raíz entera } x = 3.$$

102. Calcula el verdadero valor de las siguientes fracciones

a)  $\frac{x^4 - 16}{x^3 - x^2 - 4}$  para  $x = 2$

b)  $\frac{x^3 - 5x^2 + x + 15}{x^3 - 27}$  para  $x = 3$

c)  $\frac{x^4 - \frac{1}{16}}{2x^2 - 3x + 1}$  para  $x = \frac{1}{2}$

d)  $\frac{x^5 + 1}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$  para  $x = -1$

e)  $\frac{x^3 + 27}{x^4 + 6x^3 + 9x + 108}$  para  $x = -3$

f)  $\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$  para  $x = 1$

g)  $\frac{3x^3 - 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 4}$  para  $x = 2$

h)  $\frac{3x^3 - 3x + 72}{2x^2 - 18}$  para  $x = -3$

i)  $\frac{2x^4 - 32}{x^6 - 64}$  para  $x = \pm 2$

j)  $\frac{x^3 + \frac{1}{27}}{x^4 - \frac{1}{81}}$  para  $x = -\frac{1}{3}$

103. ¿Para qué valor de “x” la siguiente fracción toma el valor numérico 2?

$$\frac{x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30}{x^4 - 18x^3 + 111x^2 - 278x + 240}$$

104. Dada la siguiente fracción

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6}{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6}$$

- a) Factoriza sus dos términos.  
 b) Una vez factorizados, simplifícala.  
 c) Una vez simplificada, calcula su valor numérico para  $x = \sqrt{0,4}$
105. ¿Qué número debo añadir al polinomio  $4x^3 - 3x^2 + 5x$  para que admita como raíz entera  $-2$ ?
106. La expresión  $x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12 = 0$  es un polinomio ecuacional que admite como soluciones enteras  $x = 3$ ;  $x = 4$  y  $x = -1$ . ¿Cuál es la cuarta solución?
107. Calcula el valor de “m” en el polinomio  $2x^5 - 4x^4 + 3x^2 - (m + 5)x + 18$  para que al dividirlo por el binomio  $(x - 3)$  obtenga como resto 60.
108. ¿Para qué valor de “x” la fracción toma el valor numérico 3?

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24}{x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120}$$

109. El polinomio  $2x^5 - 13x^4 + 25x^3 - 5x^2 - 27x + 18$  admite como soluciones enteras  $x = \pm 1$ ;  $x = 2$  y  $x = 3$ . La quinta solución no es entera. Cálculala.
110. Sin necesidad de hacer las divisiones, explica cuál de ellas son exactas y cuáles no
- $(x^5 - 32) : (x + 2)$
  - $(x^5 + 32) : (x - 2)$
  - $(x^5 - 32) : (x - 2)$
  - $(x^5 + 32) : (x + 2)$
111. Calcula el valor de “m” para que la siguiente división sea exacta  
 $(10x^7 - 26x^5 + 33x^4 + 6x^3 - 31x^2 + mx - 15) : (2x^3 - 4x + 5)$
112. Calcula el valor de “m” para que la siguiente división sea exacta  
 $(18x^6 - 33x^5 + 7x^4 - 11x^3 + 31x^2 - mx + 9) : (2x^2 - 5x + 3)$
113. Calcula el valor de “m” para que la siguiente división sea exacta  
 $(4x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 44x^3 + 46x^2 - 40x + m) : (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)$
114. Calcula “m” en la división siguiente para que sea exacta

115.  $(9x^6 + 24x^5 - 14x^4 - 28x^3 + 41x^2 - 4mx + 4) : (3x^3 + 4x^2 - 5x + 2)$   
Calcula el verdadero valor de la fracción

$$\frac{x^4 - 4x^2 + 2x - 4}{x^3 - 8} \quad \text{para } x = 2$$

116. ¿Para qué valor de “q” el binomio  $(x - 3)$  es un divisor de:

$$3x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 4qx + 36?$$

117. ¿Para qué valor de “m” la siguiente división es exacta?

$$(18x^7 - 23x^6 + 31x^5 - 24x^4 + x^3 - 30x^2 + mx - 28) : (2x^3 - 3x^2 + 5x - 4)$$

118. Dada la fracción:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 36x - 36}{x^4 - 13x^2 + 36}$$

- a) Factoriza sus dos términos.  
b) Una vez factorizada, simplifícala.  
c) Una vez simplificada, calcula su valor numérico para  $x = \sqrt{7,1}$
119. ¿Para qué valor de x la siguiente fracción toma el valor 3?

$$\frac{x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 7x - 10}{x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10}$$

120. ¿Qué número debo añadir al polinomio:  $4x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x$  para que admita como raíz entera  $x = -2$ ?
121. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + m$  toma el valor cero, siendo  $x = 3$ ?
122. Calcula el valor de “m” en el polinomio:  $2x^4 + 3x^2 + mx + 4$  para que al dividirlo por el binomio  $(x + 2)$  obtenga como resto  $R = -38$ .
123. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $2x^5 - 3x^3 + mx^2 - 4x - 11$  admite como factor  $(x + 1)$ ?
124. ¿Para qué valor de “m” el polinomio  $3x^5 - 2x^3 + mx^2 - 4x - 14$  admite como raíz entera  $x = -2$ ?
125. ¿Para qué valor de “m” el polinomio:  $2x^5 - 3x^3 + 4x^2 + mx + 3$  se anula, siendo  $x = -1$ ?

**TEMA 4: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES****ECUACIONES DE 1<sup>ER</sup> GRADO**

126. 
$$\frac{x+4}{3} - \frac{2x+1}{4} = 1 - \frac{x+2}{12}$$

127. 
$$\frac{2x+3}{4} - \frac{3x-2}{8} = x - \frac{x+1}{4}$$

128. 
$$\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{9} = x - 4 + \frac{x-5}{9}$$

129. 
$$\frac{2\left(\frac{x+70}{80}\right) - \frac{x+30}{40}}{5} = \frac{-6+2x}{5} - \frac{x+7}{5}$$

130. 
$$\frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{6} = 6 - x$$

131. 
$$\frac{2\left(\frac{x-3}{4}\right) - \frac{x+4}{3}}{5} = 7 - \left(x + \frac{2x+9}{30}\right)$$

132. 
$$\frac{3\left(\frac{x+3}{2}\right) - \frac{1\left(\frac{x-2}{6}\right)}{2}}{4} = \frac{2x+1}{4}$$

133. 
$$\frac{2\left(\frac{x+6}{6}\right) - \frac{2\left(\frac{x+1}{4}\right)}{5}}{3} = \frac{11-x}{3}$$

134. 
$$\frac{3\left(\frac{x+3}{2}\right) - \frac{1\left(\frac{x-3}{2}\right)}{2}}{4} = \frac{x+4}{4}$$

135. 
$$1 - \frac{x+3}{9} + x = \frac{9x+1}{9}$$

136. 
$$\frac{3\left(\frac{x+4}{2}\right) - \frac{2\left(\frac{x-3}{8}\right)}{5}}{8} = x - 4 + \frac{8x+7}{80}$$

137. 
$$\frac{3\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{2\left(\frac{x-3}{3}\right)}{5}}{4} = \frac{50+x}{20}$$

138. 
$$\frac{x+4}{4} - \frac{x-4}{6} = 14 - x + \frac{14-x}{3}$$



$$139. \quad x - \frac{4}{3}\left(\frac{x-3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{3}\right) = \frac{3x+7}{6}$$

$$140. \quad \frac{x+25}{3} - \frac{x-25}{6} = 20 + \frac{55-x}{6}$$

$$141. \quad \frac{2x-3}{5} - \frac{3x-4}{8} = \frac{2-x}{120}$$

$$142. \quad \frac{3x-2}{4} - \frac{5x-1}{6} + \frac{4-x}{6} = \frac{x}{12}$$

$$143. \quad \frac{2}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{x-15}{3}$$

$$144. \quad \frac{2x-3}{4} - \frac{3x-2}{8} + \frac{1}{5} = \frac{2x+3}{40}$$

$$145. \quad \frac{4+x}{3} - \frac{x-4}{9} = \frac{3x-5}{2} - \frac{13x+3}{18}$$

$$146. \quad x - \frac{1+x}{8} = 3x - \frac{2+x}{6} - 29\frac{1}{6}$$

$$147. \quad \frac{2}{5}(x+4) - \frac{3}{8}(x-4) = \frac{x}{9}$$

$$148. \quad \frac{1-3x}{6} = 2 - \frac{x+4}{8} - \frac{4+x}{3}$$

$$149. \quad \frac{2+x}{4} - \frac{3+x}{6} + \frac{4x-2}{5} = 10 + \frac{2x+9}{4}$$

$$150. \quad \frac{1-x}{2} - \frac{1-x}{3} - \frac{1-x}{4} = \frac{-2x}{24}$$

$$151. \quad \frac{2-x}{2} - \frac{2-x}{3} - \frac{2-x}{4} = \frac{-x+\frac{1}{2}}{+24}$$



**ECUACIONES DE 2º GRADO**

152.  $x^2 - 11x + 28 = 0$

153.  $10x^2 - 7x + 1 = 0$

154.  $8x^2 - 10x + 3 = 0$

155.  $x^2 - 15x + 56 = 0$

156.  $16x^2 - 10x + 1 = 0$

157.  $18x^2 - 21x + 5 = 0$

158.  $x^2 + 12x + 32 = 0$

159.  $12x^2 + 4x - 5 = 0$

160.  $50x^2 - 35x + 3 = 0$

161.  $x^2 + 16x + 60 = 0$

162.  $16x^2 - 24x + 9 = 0$

163.  $8x^2 - 97x + 12 = 0$

164.  $5x^2 + 34x - 39 = 0$

165.  $32x^2 - 12x + 1 = 0$

166.  $49x^2 - 90x - 775 = 0$

167.  $x^2 - 3x - 54 = 0$

168.  $18x^2 - 3x - 10 = 0$

169. 
$$\frac{x^2}{3} - \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{6} + \frac{6x+1}{12} = 0$$

170. 
$$\frac{x^2}{3} + \frac{(x+1)^2}{6} - \frac{(x+2)^2}{4} = \frac{4x+1}{6}$$

171. 
$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{6} = \frac{x}{6}$$

172. 
$$\frac{(3x-12)^2}{4} - \frac{(3x+1)^2}{6} = \frac{-169}{6}$$

173. 
$$\frac{(5x-4)^2}{6} - \frac{(5x+4)^2}{6} + \frac{40}{3} = 0$$

174. 
$$\frac{(5x+3)^2}{2} - \frac{(5x-3)^2}{4} = 126$$

175. 
$$\frac{(2x+1)^2}{4} - \frac{(3x-2)^2}{8} = \frac{16x+1}{8}$$



**PROPIEDADES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO**

176. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 7 y 5.
177. Escribe una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros cuyas raíces sean  $1/4$  y  $5/6$ .
178. Escribe una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros cuyas raíces sean  $-4/5$  y  $5/3$ .
179. Calcula "m" en la ecuación  $12x^2 - mx + 6 = 0$ , sabiendo que una de sus raíces es  $2/3$ .
180. Calcula "m" en la ecuación  $15x^2 - 13x + m = 0$ , sabiendo que una de sus raíces es  $1/5$ .
181. Calcula "m" en la ecuación  $mx^2 - 28x + 3 = 0$ , sabiendo que una de sus raíces es  $3/4$ .
182. Las raíces de la ecuación  $50x^2 - mx + 2 = 0$  se diferencian en  $3/10$ . Calcula "m" y ambas raíces.
183. Las raíces de la ecuación  $5mx^2 - 42x + 16 = 0$  se diferencian en  $38/5$ . Calcula "m" y ambas raíces.
184. Las raíces de la ecuación  $4x^2 - 13x + m = 0$  se diferencian en  $3/4$ . Calcula "m" y ambas raíces.
185. Una de las raíces de la ecuación  $18x^2 - mx + 2 = 0$  es el cuádruplo de la otra. Calcula "m" y ambas raíces.
186. Una de las raíces de la ecuación  $50x^2 - 25x + m = 0$  es la cuarta parte de la otra. Calcula "m" y ambas raíces.
187. ¿Para qué valor de "m" las raíces de la ecuación  $12x^2 - mx + 5 = 0$  se diferencian en  $1/3$ ?
188. ¿Para qué valor de "m" las raíces de la ecuación  $10x^2 - mx + 1 = 0$  están en la relación de 5 es a 2?
189. Una de las raíces de la ecuación  $32x^2 - mx + 1 = 0$  es doble que la otra. Calcula "m" y ambas raíces.
190. Las ecuaciones  $2x^2 - 25x + m = 0$  y  $8x^2 - 76x + 3m = 0$  tienen una raíz en común. Calcula "m" y las raíces de ambas ecuaciones.
191. Una de las raíces de la ecuación  $18x^2 - 21x + c = 0$  es  $1/3$ . Calcula "c" y el valor de la otra raíz.
192. Una de las raíces de la ecuación  $8x^2 - bx + 3 = 0$  es  $1/2$ . Calcula "b" y el valor de la otra raíz.
193. Las raíces de una ecuación de 2º grado son números impares consecutivos, cuyos simétricos se diferencian en  $2/15$ . Escribe dicha ecuación.
194. ¿Para qué valor de "m" las raíces de la ecuación  $27x^2 - mx + 1 = 0$  son tales que una es el cuadrado de la otra?

195. La media aritmética y la media geométrica de las raíces de una ecuación de 2º grado se diferencian en  $1/6$  y ambas raíces se diferencian en  $3/8$ . Escribe dicha ecuación.
196. Las ecuaciones  $2x^2 - 37x + m = 0$  y  $12x^2 - 186x + 5m = 0$  tienen una raíz en común. Calcula "m" y las raíces de ambas ecuaciones.
197. Las ecuaciones  $x^2 - (m + 5)x + 54 = 0$  y  $x^2 - (m - 1)x + 18 = 0$  tienen una raíz en común. Calcula "m" y ambas raíces.

**AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS**

198.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$
199.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{5}{18}$
200.  $\frac{2}{x} + \frac{2}{x+5} = \frac{3}{5}$
201.  $\frac{1}{2x} + \frac{2}{x+3} = \frac{7}{20}$
202.  $\frac{1}{3x} + \frac{3}{x-1} = \frac{11}{30}$
203.  $\frac{1}{5+x} + \frac{4}{6+x} = \frac{9}{14}$
204.  $\frac{2}{x+5} + \frac{3}{2x} = \frac{11}{6}$
205.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} = \frac{3}{80}$
206.  $\frac{2}{x} - \frac{3}{x+5} = \frac{4}{7}$
207.  $\frac{4}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{2}{9}$
208.  $\frac{6}{4+x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{4}$
209.  $\frac{5}{x+5} - \frac{1}{x} = \frac{11}{60}$
210.  $\frac{4}{4-x} - \frac{5}{x+4} = \frac{7}{6}$
211.  $\frac{2+x}{5+x} + \frac{5+x}{2+x} = \frac{5}{2}$
212.  $\frac{10+x}{10-x} - \frac{10-x}{10+x} = \frac{15}{4}$
213.  $\frac{6}{x+3} + \frac{6}{x+2} = \frac{11}{3x-4}$
214.  $\frac{5}{x+5} + \frac{3}{x-4} = \frac{7}{x-3}$
215.  $\frac{4}{3+x} + \frac{5}{2+x} = \frac{8}{2x+1}$
216.  $\frac{10}{x+2} - \frac{10}{x+4} = \frac{1}{x-2}$
217.  $\frac{15}{x+3} - \frac{15}{x+4} = \frac{5}{4x+4}$
218.  $\frac{6}{x-5} - \frac{12}{x-6} + \frac{5}{x-7} = 0$
219.  $\frac{8}{x-8} - \frac{6}{x-5} = \frac{14}{2x-15}$
220.  $\frac{1}{x+4} - \frac{2}{x-4} + \frac{17}{2x-1} = 0$
221.  $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{11}{12}$
222.  $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{16}{15}$
223.  $\frac{4x-1}{x} - \frac{4x+1}{x+4} = \frac{13}{3x-4}$

$$224. \quad \frac{7}{3x-1} - \frac{7}{3x+1} = \frac{7}{31x+3} \quad 225. \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3(2x-4)}$$

$$226. \quad \frac{x^2}{4} + \frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(x+2)^2}{6} = \frac{50x+1}{20}$$

$$227. \quad \frac{x^2-9}{8} - \frac{42}{x^2-4} = 0$$

$$228. \quad \frac{x^2 - \frac{1}{8}}{2} + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}} = \frac{33}{16}$$

$$229. \quad \frac{x^2-4}{6} + \frac{3}{x^2+4} = \frac{43}{20}$$

$$230. \quad \frac{x^2-15}{3} - \frac{20}{x^2-16} = 6$$

$$231. \quad \frac{x}{x+3} - \frac{x-2}{x-3} + \frac{1}{4} = 0$$

$$232. \quad \frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{3x+1} = \frac{2}{5}$$

$$233. \quad \frac{5}{x+5} - \frac{1}{x+2} = \frac{7}{5x-2}$$

$$234. \quad \frac{7}{x+6} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{10-x}$$

$$235. \quad \frac{11}{x+2} - \frac{5}{x-4} = \frac{1}{22-x}$$

$$236. \quad \frac{5}{x-4} - \frac{4}{x-3} = \frac{9}{3x-4}$$

$$237. \quad \frac{3}{x+4} - \frac{5}{4x} = \frac{1}{5x-4}$$

$$238. \quad \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+1} = \frac{5}{4x-2}$$

$$239. \quad \frac{3}{x+3} + \frac{5}{x+1} = \frac{29}{5x-1}$$

$$240. \quad \frac{(2x-3)^2}{4} + \frac{(2x+3)^2}{8} + \frac{x^2}{6} = 6x + \frac{1}{24}$$



241.  $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x+3}{x-3} = 5$
242.  $\frac{7}{x+5} + \frac{7}{x-5} = \frac{49}{19-x}$
243.  $\frac{x}{x+5} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{8}$
244.  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{15}{14}$
245.  $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{35}{18}$
246.  $\frac{x+8}{x-8} - \frac{x-6}{x+6} = \frac{14}{3}$
247.  $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{3}$
248.  $\frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+5} = \frac{-1}{3x+5}$
249.  $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{x-3}{5} = 32 + \frac{x-1}{20}$
250.  $\frac{x+1}{x} - \frac{x-3}{x+5} = \frac{43}{63}$
251.  $\frac{15}{x+2} - \frac{10}{x+5} = \frac{7}{22-x}$
252.  $\frac{10}{x-2} - \frac{12}{x+2} = \frac{3}{x-3}$
253.  $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x+6}{x+4} = \frac{19}{5}$
254.  $\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(5+x)^2}{15} = \frac{x-23}{3}$
255.  $\frac{4}{5+x} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x}$
256.  $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{7}{3}$



**SISTEMAS DE ECUACIONES**

**257.** Resuelve por sustitución los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{7}{2} = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{x-y}{5} - \frac{x+y}{15} = \frac{2}{5} \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

**258.** Resuelve por igualación los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ x + y = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x + 2y = 28 \\ 5x - 3y = 15 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 7y = -12 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - y = -9 \\ y - x = 7 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5 \\ \frac{y-x}{5} = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \frac{x+y}{3} = 3 \\ \frac{x-y}{6} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

**259.** Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 5y = -3 \\ 2x + \frac{y}{3} = 20 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x - \frac{y}{4} = 34 \\ \frac{x}{3} - y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-2}{4} + y = 5 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

**260.** Resuelve los siguientes sistemas gráficamente:

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \text{b)} \begin{cases} 4x - 3y = 17 \\ 2x + 5y = -11 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x - 5y = 9 \end{cases} \end{array}$$

**261.** Resuelve por todos los métodos estudiados:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x + 3y = 40 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x - 7y = -27 \\ 9x + 14y = 197 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 2y = -5 \end{cases} \qquad \text{d)} \begin{cases} 5x - 4y = -1 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 2x + 5y = 38 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \qquad \text{f)} \begin{cases} 8x - 3y = -25 \\ 2x + 9y = 101 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} x + 3y = 39 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \qquad \text{h)} \begin{cases} x + 3y = 34 \\ 9x - y = -2 \end{cases}$$

$$\text{i)} \begin{cases} 3x - 7y = 18 \\ 4x + 9y = 79 \end{cases} \qquad \text{j)} \begin{cases} 3x + 7y = 94 \\ -8x + 5y = -14 \end{cases}$$

### **PROBLEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO:**

- 262.** Si al triple de un número le restas dicho número, resulta 30. ¿Cuál es ese número?
- 263.** La suma de un número natural y el siguiente es 13. Averigua mentalmente cuáles son estos números. Después plantea una ecuación y resuelve con ella el problema planteado.
- 264.** La suma de un número con su mitad es igual a 45. ¿Cuál es ese número?
- 265.** Ana pregunta a Sergio la edad que tiene y Sergio contesta: la mitad de mis años, más la tercera parte, más la cuarta parte, más la sexta parte de mis años suman los años que tengo más 6. ¿Cuántos años tiene Sergio?
- 266.** En un bolsillo tengo una cantidad de dinero y en el otro tengo el doble. En total tengo 600 €. ¿Cuántos € tengo en cada bolsillo?

267. El perímetro de una finca rectangular es 480 m. ¿Cuánto miden el largo y el ancho?
268. El doble de un número menos siete es igual a 8. ¿Cuál es ese número?
269. Un número más el doble del anterior es igual a 19. ¿Cuáles son los números?
270. Calcula la cantidad de colesterol en mg recomendada por persona y día sabiendo que la suma de su quinta parte y su sexta parte es 40 mg menor que su mitad.
271. La medida de los tres lados de un triángulo son tres números consecutivos. Si el perímetro del triángulo es 12 cm, ¿cuánto mide cada lado?
272. Luís le dice a Eva: Yo tengo el doble de euros que tú. Si Eva le contesta: Entre los dos tenemos 12 euros, ¿Cuántos euros tiene cada uno?
273. La suma de tres números consecutivos es 30. ¿Cuáles son esos números?
274. Escribe el enunciado de un problema cuyo planteamiento sea el siguiente:  
 $x + 2x = 30$
275. Inventa un problema que se pueda plantear mediante la siguiente ecuación:  
 $3x + 10 = 4x$
276. Halla tres números consecutivos cuya suma sea 96.
277. Calcula tres números impares consecutivos cuya suma sea 21.
278. Dejamos el coche en un aparcamiento durante 4 horas. Para pagar damos 6 euros y nos devuelven 2,40 euros. ¿A cuánto cobran la hora?
279. Marisa tiene 5 años más que su hermana Esther y cuando Esther tenga los años que ahora tiene Marisa las edades de ambas sumarán 35 años. ¿Qué edad tiene cada una ahora?
280. Un padre tiene 48 años y su hijo 25. Averigua cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el doble que la del hijo.
281. Juan le preguntó a María cuántos años tenía y ésta le respondió: “El doble de los años que tenía hace 15 años más los que tengo ahora son el triple de los que tenía hace 10 años”. ¿Cuántos años tiene María?
282. Calcula las longitudes de los lados de un rectángulo, sabiendo que su perímetro es de 30 metros y que uno de los lados mide 3 metros menos que el otro.

283. En una clase hay 6 alumnas más que alumnos. Si el grupo está formado por 28 personas, ¿Cuántas alumnas y alumnos hay en esa clase?
284. Dos amigas, Inés y María, han ahorrado entre las dos 17 euros, pero a María le faltan 4 euros para tener el doble de dinero que su amiga Inés. ¿Cuánto dinero ha ahorrado cada una?

### AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

263. Un grifo llena un estanque en 12 horas. Como en el fondo lleva un desagüe, estando abiertos los dos, el estanque se llena en 16 horas. ¿En cuánto tiempo vacía por sí solo el desagüe, dicho estanque?
264. Un albañil emplea 16 horas en hacer una pared. Con un ayudante lo hace en 10 horas. ¿Cuánto tiempo emplea el ayudante en hacer por sí solo la pared.
265. Mi padre hace un trabajo en 8 horas. Con mi ayuda lo hace en 5 horas y 20 minutos ¿Cuánto tiempo tardo yo sólo en hacer todo el trabajo?
266. Un estanque se llena por medio de dos grifos. El primero lo llena en 8 horas y el segundo en 12 horas. En el fondo lleva un desagüe. Abierto los tres a la vez, el estanque tarda un día en llenarse. ¿Cuánto tiempo emplea el desagüe por sí solo en vaciar el estanque?
219. Juan hace un trabajo en 6 horas. Con ayuda de su hermano Luis emplea 3 horas y 36 minutos. ¿En cuánto tiempo hace Luis por sí solo todo el trabajo?
268. Un estanque se llena por medio de dos grifos. El primero, por sí solo, lo llena en 12 horas. Como en el fondo lleva un desagüe que lo vacía en 24 horas, estando los tres abiertos a la vez, el estanque se llena en 4 h. y 48 min. ¿En cuánto tiempo llena por sí solo el estanque el segundo grifo?
269. Un grifo llena un estanque en 4 horas y otro lo llena en 8 horas. Abriendo los grifos a la vez, a las once de la mañana, ¿a qué hora estará lleno el estanque?
270. Un grifo llena un estanque en 6 horas. Otro grifo lo llena en 9 horas, y estos dos con ayuda de un tercero lo llenan en 3 horas. ¿Cuánto tiempo tarda el tercer grifo en llenar por sí solo el estanque?
271. Un grifo llena un depósito en 45 minutos y el desagüe del fondo lo vacía en 1 hora. Abiertos los dos a la vez, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito?
272. Un padre emplea la mitad de tiempo que su hijo, en pintar una habitación. Juntos la pintan en 3 h. y 20 min. ¿Cuánto tiempo emplea cada uno de ellos en pintar por separado la habitación?

273. Un hombre hace una zanja en 10 horas. Con ayuda de su hermano la termina en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tarda el hermano en hacer por sí solo la zanja?
274. Un grifo llena un estanque en 3 horas y 36 minutos. Otro lo llena en 3 horas, y estos dos con la ayuda de un tercero lo llenan en 54 minutos. ¿Cuánto tiempo tarda el tercer grifo en llenar por sí solo el estanque?
275. Un grifo llena un estanque en 6 horas. Otro lo llena en 9 horas. Como en el fondo lleva un desagüe, estando los tres abiertos a la vez, el estanque se llena en 4 horas y 30 minutos. ¿En cuánto tiempo vacía el desagüe el estanque?
276. Un grifo llena un estanque en 12 horas. Otro lo llena en 18 horas. Como en el fondo lleva un desagüe, abiertos los tres a la vez el estanque se llena en 36 horas. ¿En cuánto tiempo vacía el desagüe dicho estanque?

### **PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO:**

277. El perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Si se duplica el largo del rectángulo y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro queda en 76 metros. ¿Cuáles son las medidas originales del rectángulo y cuáles las medidas del rectángulo agrandado?
278. Las edades de Pedro y de su papá suman 44 años. Hace 4 años la edad de Pedro era la octava parte de la de su papá. ¿Cuántos años tiene cada uno?
279. Encuentre dos números tales que su suma sea 40 y su diferencia sea 14.
280. Hallar dos números sabiendo que el mayor más seis veces el menor es igual a 62 y el menor más cinco veces el mayor es igual a 78.
281. Dos números suman 241 y su diferencia es 99. ¿Qué números son?
282. Pedro tiene 335 € en billetes de 5€ y de 10€; si en total tiene 52 billetes, ¿cuántos tiene de cada clase?
283. En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?.
284. Se desea mezclar vino de 1 €/litro con vino de 3 €/litro para obtener una mezcla de 1,2 €/litro. ¿Cuántos litros deberemos poner de cada precio para obtener 2000 litros de mezcla?
285. En un almacén hay dos tipos de lámparas, las de tipo A que utilizan 2 bombillas y las de tipo B que utilizan 7 bombillas. Si en total en el

- almacén hay 25 lámparas y 160 bombillas, ¿cuántas lámparas hay de cada tipo?
286. En un parque de atracciones subir a la noria cuesta 1 € y subir a la montaña rusa 4 €. Ana sube un total de 13 veces y gasta 16 €, ¿cuántas veces subió a cada atracción?
287. En un corral hay ovejas y gallinas en número de 77 y si contamos las patas obtenemos 274 en total. ¿Cuántas ovejas y cuántas gallinas hay?
288. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es 7 y la diferencia entre el número y el que resulta al intercambiarlas es 27.
289. La suma de las edades de Luisa y de Miguel es 32 años. Dentro de 8 años la edad de Miguel será dos veces la edad de Luisa. ¿Qué edades tienen ambos?
290. Si el lado de un cuadrado es aumentado en 8 unidades, su perímetro se triplica. ¿Cuánto mide el lado?
291. Un padre tiene 20 años más que su hijo. Dentro de 12 años, el padre tendrá el doble de la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno actualmente?
292. La edad de Pedro excede a la de su amigo Santiago en 4 años y a la de su amigo Juan en 2 años. Hace 6 años la razón entre sus edades era 2:3:4. ¿Qué edad tienen actualmente?
293. La edad de María es el triple de la de Ester y excede en 5 años a la edad de Isabel. Si las edades de Ester e Isabel suman 23 años. Hallar la edad de cada una.
294. Guiso tiene la cuarta parte de la edad de su padre Andrés y el triple de la edad de su hermano David. ¿Qué edad tiene cada uno, si sus edades suman 48 años?
295. Hace 6 años un padre tenía el cuádruplo de la edad de su hijo. En 10 años más tendrá sólo el doble. Hallar la edad actual del padre e hijo.
296. Un padre tiene 52 años y su hijo 16. ¿Hace cuántos años el hijo tenía la séptima parte de la edad del padre?
297. Por 2 bocadillos y 3 cervezas he pagado 285 céntimos. Por 3 bocadillos y 2 cervezas he pagado 340 céntimos. Halla el precio de cada artículo.
298. Un número y la tercera parte de otro suman 42. La tercera parte del primero y el segundo suman 30. Calcúlos.
299. El duplo de un número y la mitad de otro suman 114. La tercera parte del primero y el segundo suman 52. Calcúlos.

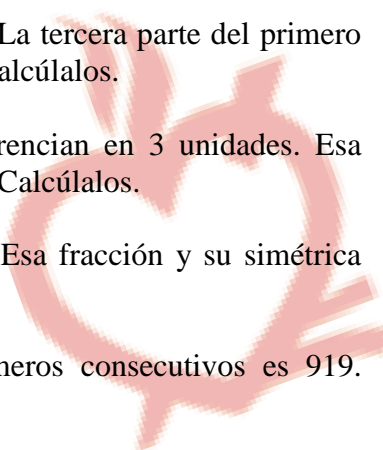
300. La mitad de un número excede a la tercera parte de otro en 18 unidades. El duplo del primero y la mitad del segundo se diferencian en 117 unidades. Calcúlalos.
301. Por 6 bolígrafos y 5 cuadernos he pagado 619 céntimos. Por 2 bolígrafos y 3 cuadernos he pagado 333 céntimos. ¿Cuánto costarán 4 bolígrafos y 7 cuadernos?
302. Para pagar una cámara fotográfica de 12.000 céntimos., una persona entregó 60 dólares y 52 marcos devolviendo 32 céntimos. Para pagar la factura del hotel que importaba 7.500 céntimos. Entregó 25 dólares, 60 marcos y 340 céntimos. ¿A cómo se cotiza cada moneda?
303. Halla una fracción tal que si a sus dos términos aumentamos en 5 unidades se transforma en  $\frac{2}{3}$ . Si a sus dos términos sumamos 8 unidades se transforma en  $\frac{9}{12}$ .
304. Halla una fracción tal que si a sus dos términos sumamos una unidad se transforma en  $\frac{4}{5}$ . Si a sus dos términos restamos una unidad se transforma en  $\frac{3}{4}$ .
305. Las dos cifras de un número suman 6. Ese número y el que resulta de invertir el orden de sus cifras están en la relación de  $\frac{5}{17}$ . Calcúlalos.
306. En un número de dos cifras el triple de las decenas y la tercera parte de las unidades suman 11 unidades. Ese número y el que resulta de invertir el orden de sus cifras están en la relación de  $\frac{4}{7}$ . Calcúlalo.
307. Las dos cifras de un número suman 8. Dividiendo dicho número por el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 4 de cociente y 3 de resto. Calcúlalo.
308. Las dos cifras de un número se diferencian en 5. Ese número y el triple del que resulta de invertir el orden de sus cifras están en la relación de  $\frac{8}{9}$ . Calcúlalo.
309. Dos capitales de 72.000 céntimos. y 96.000 céntimos. se han colocado a réditos distintos y han producido una renta trimestral de 3.600 céntimos. Si se invirtiesen los réditos, los intereses llegarían a sumar 60 céntimos. menos que los anteriores. Calcula los réditos.
310. Dos granjeros tienen distinto número de conejos. Si el primero comprase 50 conejos y el segundo 125 conejos, el segundo tendría el doble que el primero; pero si el segundo comprase 150 conejos y el primero vendiese 25 de los suyos este tendría  $\frac{1}{9}$  de aquél. ¿Cuántos tiene cada uno?
311. Dos hermanos tienen cantidades distintas de dinero. Si se gastan 50 céntimos. cada uno de su dinero, el segundo tiene triple de dinero que el

- primero. Si se gastan 80 céntimos. cada uno de su dinero, ahora el segundo tiene 6 veces más dinero que su hermano. ¿Cuánto tiene cada hermano?
- 312.** Dos cuadernos tienen distinto número de hojas. Arrancando 16 hojas del primero y 20 del segundo, el primer cuaderno tiene ahora doble hojas que el segundo. Si al primero le añadimos 18 hojas y quitamos 3 hojas al segundo también el primero contaría con doble número de hojas. ¿Cuántas hojas tiene cada cuaderno?
- 313.** Por 3 calculadoras y 2 libros he pagado 9.000 céntimos. Otro día compro 2 calculadoras y 5 libros iguales a los anteriores, y como descuentan el 15 % en las calculadoras y el 10 % en los libros, pago 7.625 céntimos. Halla el precio de un libro y una calculadora.
- 314.** Las dos cifras de un número suman 9 unidades. El triple de ese número excede en 9 unidades al número que resulta de invertir el orden de sus cifras. Calcúlalo.
- 315.** Las dos cifras de un número suman 9. Multiplicando ese número por 30 y dividiendo el resultado obtenido por el número que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene de cociente exacto 25. ¿De qué número se trata?
- 316.** Las dos cifras de un número se diferencian en 5 unidades. La octava parte de ese número y el tercio del que resulta de invertir el orden de sus cifras son iguales. Calcúlalo.
- 317.** Un padre reparte la propina entre sus hijos. A los mayores de 10 años les da 125 céntimos. y a los menores de esa edad 75 céntimos. En total ha repartido 525 céntimos. Si a los mayores les diese 150 céntimos. y a los pequeños 100 céntimos., dedicaría 650 céntimos. ¿Cuántos hay mayores de 10 y cuántos menores?
- 318.** En un taller trabajan 5 oficiales y 3 peones. Los sueldos diarios ascienden a 13.200 céntimos. Se aumenta el 12 % el sueldo a los oficiales y el 15 % a los peones, con lo cual los sueldos diarios ascienden a 14.910 céntimos. Calcule el sueldo actual de un oficial y un peón.
- 319.** Para pagar un reloj de 5.400 céntimos. una persona entregó 14 libras esterlinas y 33 francos suizos y le devolvieron 60 céntimos. Por la factura del restaurante, que asciende a 3.400 céntimos., pagó con 10 libras y 15 francos suizos y 25 céntimos. ¿A cómo se cotiza cada moneda?
- 320.** Dos pueblos A y B están situados en lados distintos de un puerto de montaña. Un ciclista que sube a 18 km./h. y baja a 36 km./h. emplea 50 minutos de ir de A a B. El viaje de regreso le lleva 5 minutos más. ¿Qué distancia separa ambos pueblos por carretera?

321. Por 300 gramos de café y  $\frac{3}{4}$  de kg. de carne, una señora pagó 666 céntimos. Por  $\frac{3}{4}$  kg. de café y 600 gramos de carne otra señora pagó 900 céntimos. ¿Cuál es el precio del kg. de café y de carne?
322. El producto de dos números no varía aumentando al mayor en doce unidades y disminuyendo al otro en 6 unidades. Tampoco varía si disminuimos al primero en 8 unidades y aumentamos al segundo en 9 unidades. Calcula ambos números.
323. El producto de dos números no varía si disminuimos al primero en 4 unidades y aumentamos al segundo en 8 unidades. Tampoco varía disminuyendo al primero en 10 unidades y aumentando al segundo en 40 unidades. Calcúlalos.
324. Dos capitales de 108.000 céntimos. y 96.000 céntimos. están colocados a réditos distintos y en conjunto producen una renta semestral de 8.700 céntimos. Si el primero se colocase a un rédito inferior en 1 % al que está colocado y el segundo se colocase a un rédito superior en un 2 % al que está colocado, los intereses producidos por ambos capitales en igual periodo de tiempo estarían en la relación de 9 es a 10. Calcula ambos réditos.
325. Dos hermanos tienen salarios distintos. Si al menor le aumentasen el salario en el 12,5 % ambos cobrarían igual. Si los dos tuvieran una subida lineal de 300 céntimos. en su sueldo diario, ambos sueldos quedarían en la relación de 9 es a 10. Calcula sus sueldos diarios.
326. Dos hermanos cobran sueldos mensuales distintos. El primero ahorra mensualmente  $\frac{1}{12}$  de su sueldo y el segundo  $\frac{1}{10}$  del suyo, con lo cual los dos ahorran la misma cantidad al mes. Ambos consiguen una subida lineal de 6.000 céntimos. en sus sueldos y ahorrando la misma proporción, el segundo ahorra 100 céntimos. más al mes que su hermano. Calcula sus sueldos.

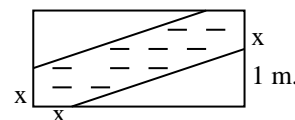
### **PROBLEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO:**

327. Dos números impares consecutivos son tales que la tercera parte del mayor excede en 10 unidades a la raíz cuadrada del menor. Calcula ambos números.
328. Entre varios amigos y por partes iguales tienen que pagar una cuenta de 3.500 céntimos. Cómo uno de ellos no tiene dinero, cada uno de los restantes tiene que pagar 175 céntimos. más. ¿Cuántos eran los amigos?
329. La media aritmética y la media geométrica de dos números se diferencian en 25 unidades. Ambos números suman 146 unidades. Calcúlalos.

330. La media aritmética y la media geométrica de dos números se diferencian en 12 unidades y ambos números se diferencian en 48 unidades. Calcúlalos.
331. Las dos cifras de un número suman 10. El producto de ese número por el que resulta de invertir el orden de sus cifras es 2.296. Calcúlalo.
332. Las dos cifras de un número suman 7. El cuadrado de ese número y el cuadrado del que resulta al invertir el orden de sus cifras se diferencian en 2.079 unidades. Calcúlalo.
333. Dos números pares consecutivos son tales que la raíz cuadrada del menor y la sexta parte del mayor forman números consecutivos. Calcúlalos.
334. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 25 cm., un cateto y su proyección suman 8,96 cm. Calcula el área y el perímetro del triángulo.
335. En un triángulo rectángulo de perímetro 40 cm., la hipotenusa mide 17 cm. Calcula los catetos.
336. Dos números se diferencian en 5 unidades y sus simétricos suman  $\frac{7}{60}$ . Calcúlalos.
337. Un número y el cuadrado de otro suman 27. El triple del primero y el segundo se diferencia en una unidad. Calcúlalos.
338. La altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 6,12 cm. Las proyecciones de los catetos difieren en 21,08 cm. Calcula los tres lados del triángulo.
339. El área de un rectángulo es 1.215 cm. Su perímetro 144 cm. Calcula sus dimensiones.
340. La diagonal de un rectángulo mide medio metro. Su perímetro es 1,24 metros. Calcula su área.
341. Los cuadrados de dos números suman 369. La tercera parte del primero y la mitad del segundo suman 11 unidades. Calcúlalos.
342. Los dos términos de una fracción se diferencian en 3 unidades. Esa fracción y su simétrica se diferencian en  $\frac{5}{6}$ . Calcúlalos.
343. Los dos términos de una fracción suman 7. Esa fracción y su simétrica suman  $\frac{29}{10}$ . Calcúlala.
344. La diferencia entre los cubos de dos números consecutivos es 919. Calcúlalos.
- 

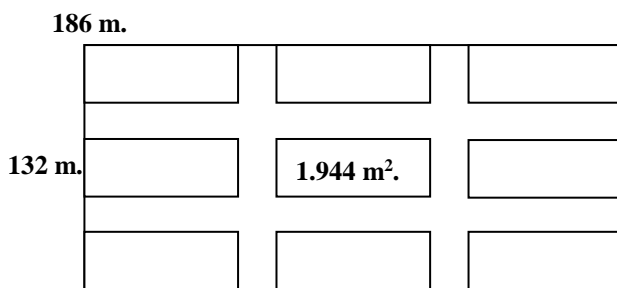
345. Al duplo de un número le hemos sumado la mitad de su raíz cuadrada y así hemos obtenido  $21\frac{1}{4}$ . ¿Con qué número hemos operado?
346. El producto de dos números es 72. El mayor dividido por el menor da 4 de cociente y 2 de resto. Calcúlalos.
347. En una división entera el cociente es doble que el divisor. El resto es la cuarta parte del divisor y el dividendo es 291. Escribe la división.
348. Un auditorio tiene forma cuadrada es decir, las mismas filas que butacas en cada fila. Con el fin de hacer un pasillo central se quitan las 9 butacas del centro y con el fin de no perder aforo se añaden 12 filas más. Calcula el aforo.
349. Un niño recién nacido aumentó en la primera semana de su vida el cuádruplo de la raíz cuadrada del peso que tuvo al nacer, pesando al final de esa semana 3.840 gramos. ¿Cuánto pesó al nacer?
350. La mitad del cuadrado de un número y el triple de otro suman 30 unidades. La mitad del primer número y la cuarta parte del segundo difieren en 2 unidades. Calcúlalos.
351. Un grifo emplea doble tiempo que otro en llenar un estanque. Juntos lo llenan en 16 h. 40 min. ¿Cuánto emplea cada uno por separado?
352. En una división entera el resto es la raíz cuadrada del divisor, el cociente es 31 y el dividendo 1.526. Escribe la división.
353. El producto de dos números consecutivos no varía si aumentásemos al menor en 9 unidades y disminuimos al mayor en 6 unidades. Calcúlalos.
354. La media aritmética y la media geométrica de dos números son números impares consecutivos. Ambos números se diferencian en 16 unidades. Calcúlalos.
355. ¿Qué número debo sumar a 9, 21, 6 y 15 para que formen una proporción discreta?
356. En un triángulo un ángulo es doble que el otro. El tercer ángulo es el cuadrado del menor. Calcula los tres ángulos del triángulo.
357. La suma de dos números dividida por su diferencia da de cociente exacto 6. La diferencia entre los cuadrados de dichos números es 24. Calcúlalos.
358. Un propietario de una papelería hace un pedido de lapiceros por un total de 1.500 céntimos. Otro pedido también cuesta 1.500 céntimos., pero consta de 25 lapiceros menos porque cada uno ha subido 3 céntimos. de precio. Halla los precios de los lapiceros.

359. Las edades de dos hermanos son tales que la del mayor es el cuadrado de la del menor. Cuando pasen tres años será el doble. Calcula sus edades actuales.
360. En la actualidad la edad de un padre es el doble que la de su hijo. Hace 24 años la edad del padre era el cuadrado de la del hijo. Calcula sus edades actuales.
361. Una persona posee una parcela rectangular cuyo perímetro es de 240 metros. En su centro construye una piscina cuadrada de lado la cuarta parte de la anchura del terreno que ocupa exactamente  $1/24$  de la extensión total de la finca. Calcula sus dimensiones.
362. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm. Dicha hipotenusa no varía si disminuimos un cateto en 4 cm. y aumentamos el otro en 8 cm. Calcula los perímetros de los dos triángulos.
363. La suma de tres múltiplos consecutivos de 6, es 25 veces menor que la suma de los cuadrados de dichos múltiplos. Calcúlalos.
364. Una piscina mide 36 m. de largo por 24 m. de ancho. En sus cuatro vértices se construyen 4 piscinas infantiles cuadradas y los espacios libres se cubren de césped. La superficie total del conjunto es ahora  $2.880 \text{ m}^2$ . Calcula el lado de cada piscina infantil, siendo las cuatro iguales.
365. La figura adjunta representa la bandera de un hipotético país. Calcula su área y perímetro sabiendo que la zona punteada tiene un área de  $1,52 \text{ m}^2$ .



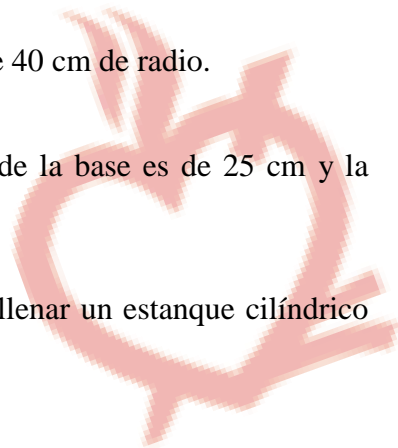
con lo cual ambos consiguieron la misma puntuación. Escribe las notas del primer examen.

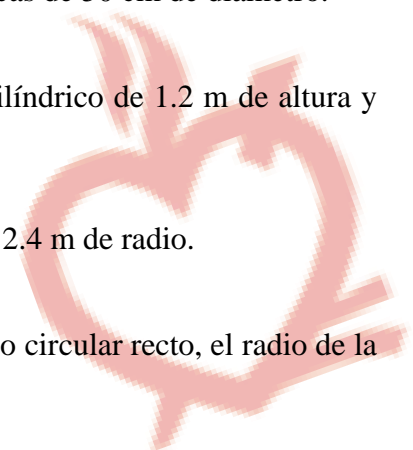
- 370.** Los tres lados de un triángulo miden 20, 18 y 11 cm. Acortando los tres lados en una misma longitud, el triángulo así obtenido es rectángulo. ¿En cuánto hay que acortar cada lado?
- 371.** Un viñedo tiene forma cuadrada, es decir tiene tantas filas de cepas como cepas en cada fila. Con el fin de hacer un pasillo central se quitan las 6 cepas del centro de cada fila y con el fin de no perder plantas se añaden 9 filas más. ¿Cuántas cepas hay en el viñedo?
- 372.** La suma de dos números dividida por su diferencia da como cociente exacto 3. El producto de esos mismos números dividido por su suma da 2. Calcúlalos.
- 373.** El producto de dos números dividido por su diferencia da como cociente exacto 18. La suma de esos dos números dividida por su diferencia da como cociente exacto 5. Calcúlalos.
- 374.** Tres múltiplos consecutivos de siete son tales que el cuadrado del mayor equivale a la suma de los cuadrados de los otros dos. Calcúlalos.
- 375.** El profesor de Educación Física quiere hacer una tabla de Gimnasia para lo cual quiere colocar a los alumnos en forma de cuadrado, es decir, igual número de alumnos por fila que por columna. En la primera prueba le sobran 9 alumnos. Para hacer un cuadrado con un alumno más por fila y columna le faltan 10 alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene?
- 376.** Una finca de 186 m. de larga por 132 m. de ancha se parcela en 9 partes iguales por medio de 4 calles de igual anchura, dos perpendiculares a la base y dos perpendiculares a la altura. El área de cada parcela es 1.944 m<sup>2</sup>. Calcula la anchura de las calles y las dimensiones de cada parcela.



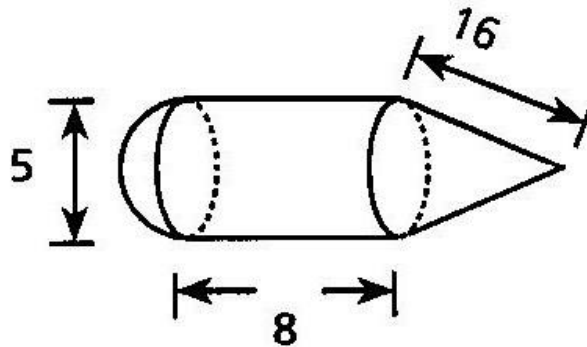
## TEMA 5: ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

377. El perímetro de la base de un prisma triangular recto mide 15 cm. Hallar el área lateral si la altura del prisma es 12 cm.
378. Calcula las áreas lateral, total y el volumen de un prisma cuadrangular. El lado de la base mide 8 cm y la altura 12 cm.
379. Calcula las áreas lateral, total y el volumen de un cubo de 12 cm de arista.
380. La base de una columna hexagonal mide 40 cm de lado y 34 cm de apotema, la altura de la columna es de 8 m. Calcula lo que cuesta pintar toda la columna, si por m<sup>2</sup> nos cobran \$15.00
381. Hallar el área lateral de una pirámide sabiendo que el perímetro de la base es 50 cm y la apotema de la pirámide es de 30 cm.
382. Hallar las áreas lateral y total de una pirámide de base cuadrada de 48 m de lado, la apotema mide 75 m.
383. La base de un estanque es un rectángulo de 25 m y 12 m. Calcular el volumen si la altura es de 1.6 m.
384. Calcula el área lateral y el volumen de un tanque cilíndrico de 5 m de radio y 8 m de altura.
385. Calcula el área y el volumen de una esfera de 40 cm de radio.
386. Calcula el volumen de un cono si el radio de la base es de 25 cm y la altura es de 40 cm.
387. Calcula el volumen de agua necesario para llenar un estanque cilíndrico de 12 m de diámetro y 0.8 m de altura.

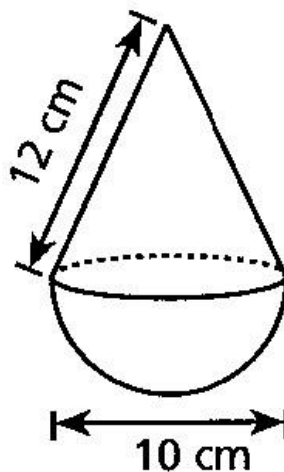


388. El diámetro de la base de una lata cilíndrica es de 24 cm y su altura es de 36 cm. Calcula el volumen.
389. El radio de la base de un cilindro es de 2.3 m y la altura es de 4.5 m. Calcula el volumen.
390. Calcula la diferencia entre los volúmenes de dos esferas concéntricas de 15 cm de radio una y de 10 cm la otra.
391. El radio de la base de un cono es de 12 cm, la altura es de 18 cm. Calcula el área lateral y el volumen.
392. Halla el área y el volumen de una pirámide que tiene como base un triángulo equilátero de 40 cm de lado, la altura de la pirámide es de 50 cm.
393. Calcula el área y el volumen de un cono que tiene como radio de la base 1.2 m y 4 m de altura.
394. Hallar el área y el volumen de un tronco de forma cilíndrica, el radio de la base es de 22 cm y la longitud del tronco es de 4.85 m.
395. Calcula la superficie de cuero que se necesita para hacer un balón de fútbol de 9 cm de radio. Para las costuras se emplean 200 cm<sup>2</sup>.
396. Calcula el área y el volumen de un globo esférico de 80 cm de radio.
397. Calcula la cantidad de cemento que se necesita para rellenar 23 columnas de 5 m de altura si las columnas son cilíndricas de 50 cm de diámetro.
398. Hallar el área y el volumen de un tambor cilíndrico de 1.2 m de altura y 60 cm de diámetro.
399. Hallar el volumen y el área de una esfera de 2.4 m de radio.
400. Hallar el volumen y el área lateral de un cono circular recto, el radio de la base mide 80 cm y la altura 2.4 m.
- 

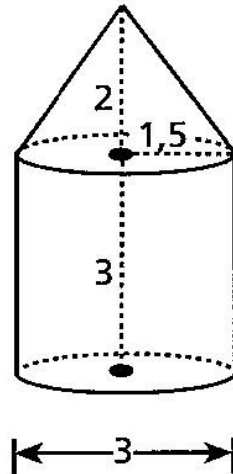
401. Hallar el área y el volumen de un prisma de base pentagonal cuyo lado y apotema son 17 cm y 12 cm respectivamente, la altura del prisma es de 25 cm.
402. Tenemos un flotador para ir a la playa que tiene esta forma. Calcula la cantidad tejido hinchable necesario para confeccionarlo, si las medidas están en decímetros:



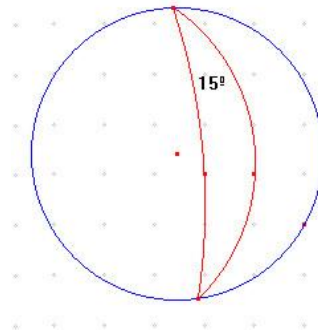
403. Una empresa de señales marítimas ha fabricado estas boyas de poliestireno. Calcula la cantidad de film transparente necesario para recubrir mil boyas.



404. Para las fiestas de mi pueblo han montado una carpa como la de la imagen. Calcula la superficie de tela necesaria para su fabricación si las medidas están en metros.



405. En una ciudad se ha construido un obelisco piramidal de base triangular de cristal con el lado de la base de 5 m y una altura de 50 m. Calcula la superficie de cristal necesaria para recubrirlo teniendo en cuenta que la base no está recubierta de cristal.
406. Calcula la superficie de un huso horario en una esfera terrestre de 10 cm de radio.



407. Calcula lo que costará empapelar las cuatro paredes de una habitación con forma de prisma de base rectangular de 5 m x 6 m y altura 3,5 m, si el metro cuadrado de papel pintado se vende a 0,75 €.
408. Las farolas de una ciudad están culminadas en un fanal con forma de pirámide pentagonal, en el que el lado del pentágono es 25 cm y la apotema de las caras es 30 cm. Calcula la superficie de cristal necesaria para cada farola, si la base es una pieza metálica.

## TEMA 6: PROBABILIDAD

- 409.** Forma el espacio muestral del los siguientes experimentos aleatorios:
- Lanzamiento de una moneda al aire.
  - Lanzamiento de un dado de seis caras.
  - Extracción de una bola de una urna con doce bolas numeradas del 1 al 12.
  - Extracción de una bola de una urna que contiene 5 bolas rojas, 4 amarillas y 3 verdes.
- 410.** En una caja hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Consideramos el experimento aleatorio extraer una bola de la caja.
- Escribe el espacio muestral.
  - Sean los sucesos  $A=\{2, 3, 6\}$ ;  $B=\{1, 5, 9, 10\}$ ;  $C=\{2, 5\}$ . Señala dos sucesos que sean compatibles y otros dos que sean incompatibles.
  - Escribe los sucesos contrarios de A, B y C.
- 411.** Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado de seis caras numeradas del 1 al 6 y anotar el valor de la cara superior.
- Determina el espacio muestral.
  - Escribe los sucesos obtener múltiplo de 2 y obtener múltiplo de 3.
  - ¿Son compatibles o incompatibles los sucesos del apartado anterior?
  - Escribe el suceso contrario de obtener menor que 5.
- 412.** Se dispone de un dado con forma de octaedro y caras numeradas de 1 a 8. Se lanza y se anota el resultado de la cara oculta.
- Escribe el espacio muestral.
  - Escribe los sucesos obtener par y obtener impar.
  - Determina si los sucesos del apartado anterior son compatibles, incompatibles o contrarios.
  - Escribe el suceso obtener múltiplo de 5.
  - Escribe un suceso compatible y otro incompatible con el anterior. Escribe también su suceso contrario.
- 413.** Se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado de 6 caras y anotar el resultado. Sean los sucesos:  $A=\{\text{obtener múltiplo de 3}\}$ ;  $B=\{\text{obtener un número primo}\}$ ;  $C=\{\text{obtener un número par}\}$ . ¿Son

compatibles los sucesos A y B, A y C, B y C?. ¿Son contrarios alguno de los sucesos anteriores?.

- 414.** Una bolsa contiene 5 bolas rojas, 3 azules y 1 amarilla. Se extrae una bola sin mirar. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos: obtener bola roja, no obtener bola roja, obtener bola azul, no obtener bola azul, obtener bola amarilla, no obtener bola amarilla.
- 415.** En un baraja española de 40 cartas, se extrae una carta al azar. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: sacar una copa, sacar una sota, sacar la sota de copas.
- 416.** En una caja hay 9 bolas numeradas de 1 a 9. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de: sacar la bola 5, sacar una bola inferior a 4, sacar una bola mayor que 6, sacar una bola mayor que 2 y menor que 6.
- 417.** Se lanza un dado con las caras numeradas de 1 a 6
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3?.
  - ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 4?.
  - ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número menor que 3?.
  - ¿Son compatibles o incompatibles los sucesos anteriores?.
  - ¿Algunos de los sucesos de a), b), c) son contrarios?.
- 418.** Una urna tiene 10 bolas rojas y 4 bolas azules. Se extrae una bola al azar. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos: sacar una bola verde, sacar una bola roja, sacar una bola azul. De entre los sucesos anteriores, ¿hay algunos que sean contrarios?.
- 419.** Se extrae al azar una carta de una baraja española. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos: que sea oro, que sea figura, que sea la sota de oros, que sea oro o figura.
- 420.** Tenemos una ruleta dividida en 12 sectores de igual tamaño. Hacemos girar la ruleta y anotamos el número del sector que queda en la parte superior. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: salir par, salir múltiplo de 6, salir múltiplo de 5, salir múltiplo de 4, salir impar, salir múltiplo de 3. Clasifica los sucesos anteriores en compatibles e incompatibles.
- 421.** Se extare un carta al azar de una baraja española. Di si son o no equiprobables los sucesos: salir oro, salir copa, salir espada, salir figura, salir rey, salir as.

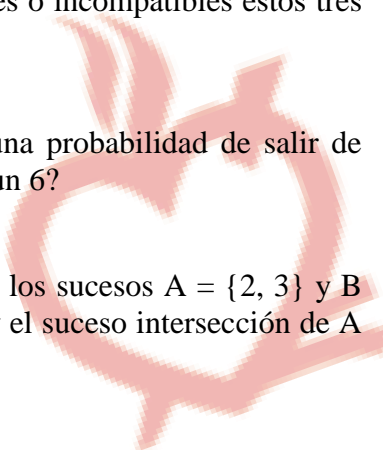
422. Una máquina tragaperras ha dado a la largo de un día los siguientes premios

premio	0€	1€	5€	10€
nº de veces	840	60	13	1

Halla la probabilidad de los siguientes sucesos

- a) Que no entregue ningún premio.  
b) Que entregue un premio de 10€.  
c) que entregue un premio menor que 10€.
423. Se tiene una ruleta dividida en 8 sectores de igual tamaño numeradas de 1 a 8. Los sectores 1, 2, 5, 6 y 7 están además coloreados de verde. Los sectores 3, 4 y 8 están coloreados de rojo. Calcula los siguientes probabilidades: obtener 3, obtener color rojo, obtener un múltiplo de 2, obtener color verde. ¿Cuáles de los sucesos anteriores son contrarios?.
424. En un armario de cocina hay 6 refrescos de cola, 12 de naranja y 5 de limón. Cuando Ana iba a coger un refresco se fue la luz y, por tanto, lo tomó al azar. Halla las siguientes probabilidades: que sea de cola, que sea de limón, que sea de naranja, que sea de cola o limón, que no sea de limón.
425. Una ruleta como la de los casinos tiene 37 agujeros numerados de 0 a 36. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos: que salga 15, que salga múltiplo de 7, que salga un número acabado en 4, que salga un número de una cifra, que salga un número que empiece por 3.
426. La probabilidad de que un alumno llegue tarde a clase es de  $1/15$ , ¿cuál es la probabilidad de que llegue puntualmente?.
427. Se sabe que para una persona que prueba el tabaco la probabilidad de hacerse adicto a la nicotina es  $4/5$ . Calcula la probabilidad de que una persona que pruebe el tabaco no se haga adicto a la nicotina. A la vista de los resultados, ¿qué es más probable, hacerse adicto o no?. Justifica tu respuesta.
428. Estás jugando con un dado cargado en el que no todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. Para este dado, la probabilidad de que salga una determinada cara es proporcional su número.

Considera los sucesos: A salir número par, B salir número impar y C salir número primo. Calcula la probabilidad de los sucesos A, B, C, , y AUC,  $A \cap C'$  y  $B \cap C$ .

- 429.** En una habitación se encuentran 210 personas de las cuales la mitad son mayores de edad y la tercera parte del total son mujeres, mientras los varones menores de edad representan el 40% del total. Calcula las siguientes probabilidades:
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mujer?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad o mayor de edad?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad y varón?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mayor de edad y mujer?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad o varón?
- 430.** Se hace una quiniela con un dado para hacer quinielas que lleva en sus caras tres veces el 1, dos veces la X y una vez el 2. Calcula la probabilidad de que salga una X o un 2.
- 431.** En una urna hay 3 bolas blancas, 2 rojas y 4 azules. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar, salga roja.
- 432.** Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas, y se consideran los siguientes sucesos: A= "obtener una de oros", B = "obtener una sota" y C = "obtener un tres". Di si son compatibles o incompatibles estos tres sucesos. ¿Por qué?
- 433.** Un dado está trucado para que el 6 tenga una probabilidad de salir de 0,25. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un 6?
- 434.** En el lanzamiento de un dado, consideramos los sucesos  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{2, 4, 6\}$ . Halla el suceso unión de A y B y el suceso intersección de A y B.
- 

435. Se lanza dos veces un dado. Representamos el espacio muestral de la siguiente forma:  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (6, 6)\}$  donde en cada pareja el primer número representa lo que se obtiene en la primera tirada y el segundo en la segunda. Sean los sucesos:  $A =$  "la suma de las dos tiradas es 7" y  $B =$  "el primer número es par".  
Calcula la probabilidad de  $A \cup B$ .
436. Se lanza una moneda dos veces. Si consideramos los sucesos  $A =$  "obtener lo mismo en las dos tiradas",  $B =$  "la primera vez sale cara" y  $C =$  "obtener al menos una cruz".  
Halla la probabilidad de los sucesos:
437. En el lanzamiento de un dado, consideramos los sucesos  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{2, 4, 6\}$ . Halla la probabilidad del suceso unión de  $A$  y  $B$ .
438. Calcula la probabilidad de aprobar un examen de matemáticas si se sabe que hay una probabilidad de 0,4 de no aprobar.
439. Se lanza dos veces un dado. Representamos el espacio muestral de la siguiente forma:  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (6, 6)\}$  donde en cada pareja el primer número representa lo que se obtiene en la primera tirada y el segundo en la segunda. Sean los sucesos:  $A =$  "obtener primero un 4 y después un 3"  $= (4, 3)$ ,  $B =$  "la suma de las dos tiradas es 7",  $C =$  "el primer número es par" y  $D =$  "obtener el mismo número en las dos tiradas".
440. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:
441. Una urna contiene 3 bolas blancas (B), 2 rojas (R) y 1 amarilla (A). Se extrae una bola al azar. Indica cuáles son los sucesos elementales, el suceso seguro y el suceso imposible.
442. En el lanzamiento de un dado, consideramos los sucesos  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{2, 4, 6\}$ . Halla el suceso unión de  $A$  y  $B$  y el suceso intersección de  $A$  y  $B$ .
443. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento "suma de los puntos obtenidos al lanzar dos dados"?

